	<b>MODELO DE FORMACIÓN POR PROCESOS Y VALORES CRISTIANOS</b>	
	<b>ÁREA DE MATEMÁTICAS</b>	
	<b>TALLER N°1. TEMA: FUNCIÓN LINEAL.</b>	
	<b>Versión 1.0</b>	Fecha última actualización 01/09/ 2011

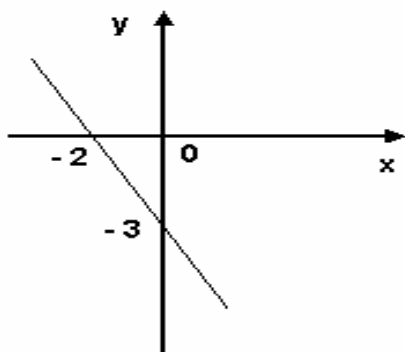
Fecha: \_\_\_\_\_ Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_  
Grado: \_\_\_\_\_ Maestros: **Iván de J. Valencia Orozco, Lyda Rodríguez T.** DURACIÓN: IIP

**Eje Articulador:** Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

META	VALOR.	FIRMA DE ACUDIENES
Construyo el concepto de función lineal y entiendo la relación entre los registros de representación tabular, gráfico y algebraico y lo evidencio presentando argumentos en la solución de problemas para, así, fortalecer mis operaciones mentales.		

**LA FUNCION LINEAL**, algebraicamente es la ecuación de la línea recta y está dada por  $y = mx + b$ , donde **m expresa la pendiente** (grado de inclinación de la recta respecto al eje x) y **b expresa la ordenada en el origen** e indica el corte de la recta con el eje y en el plano cartesiano. Observamos que esta ecuación es de primer grado con dos variables. Como su representación gráfica es una línea recta, basta determinar dos puntos asignando valores a la x y representarlos en el plano cartesiano.

**Ejemplo:** Representar la recta dada por  $y = -\frac{3}{2}x - 3$



**Solución:** Realizamos la siguiente tabulación asignando dos valores que deseemos a la variable x

x	0	-2				
y	-3	0				

Obteniendo los puntos (0, -3) y (-2, 0) determinando la recta.

La pendiente de la recta es  $m = -\frac{3}{2}$  y la ordenada en el origen es -3

**Ejemplo:** Escribir la ecuación de la recta de pendiente 2 y ordenada en el origen 1. Grafique la recta

**Solución:** Como  $m = 2$  y  $b = 1 \Rightarrow y = 2x + 1$

**EJERCICIO 1:** Escribir la ecuación de la recta y dibujarla, dada su pendiente y su ordenada en el origen en cada caso:

1.  $m = -2$  y  $b = 3$
2.  $m = -3$  y  $b = -1$
3.  $m = 1$  y  $b = -4$
4.  $m = 3/4$  y  $b = 2$
5.  $m = -2/3$  y  $b = 1$

**La ecuación  $y = mx + b$  se llama forma explícita de la línea recta**

Observe las gráficas y concluya a que lado se inclina la recta según el signo de la pendiente (**m**) y cuando pasa por encima, por debajo o por el origen según el signo de la ordenada en el origen (**b**)

**EJERCICIO 2:** La ecuación general de la línea recta está dada por  $AX + BY = C$  y se puede pasar a forma explícita despejando la variable y, así:  $y = -\frac{A}{B}X + \frac{C}{B}$ .

Para su representación gráfica determinamos los cortes de la recta con el eje x haciendo a  $y = 0$  y con el eje y haciendo a  $x = 0$ .

Graficar las siguientes rectas y pasar su ecuación a la forma explícita:

1.  $2x + 3y = 6$

2.  $x - 3y = 3$

3.  $2x - y = -4$

4.  $3x - 2y = -9$

5.  $3x - 3y = 6$

6.  $2x - 4y = 10$

7.  $2x - 3y = -6$

8.  $2x - 3y = 6$

9.  $12x + 3y = 12$

10.  $4x + 3y = -6$

11.  $5x + 6y = 10$

12.  $2x + y = -6$

**PENDIENTE DE UNA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS DADOS.**

Al valor de **m** lo denominamos **pendiente** de la recta y el mismo nos indica, la inclinación de la recta respecto al eje x. La pendiente m de una recta que contiene los puntos  $P_1(x_1; y_1)$  y  $P_2(x_2; y_2)$  se calcula utilizando la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_2 \neq x_1$$

De los dos puntos que selecciones, no importa quién es  $P_1$  o  $P_2$ , lo importante es tener en cuenta la diferencia de ordenadas (y) entre la diferencia de las abscisas (x) en el mismo orden.

Si dejamos como variable el  $P(x; y)$  y fijo el  $P_1(x_1; y_1)$

$$\Rightarrow m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \text{ se llama ecuación punto pendiente de la recta.}$$

**Ejemplo:** Halle la pendiente de la recta y su ecuación si pasa por los puntos (2, 5) y (4, -2).

**Solución:** Hallamos m y escogemos uno de los dos puntos (2, 5) así,

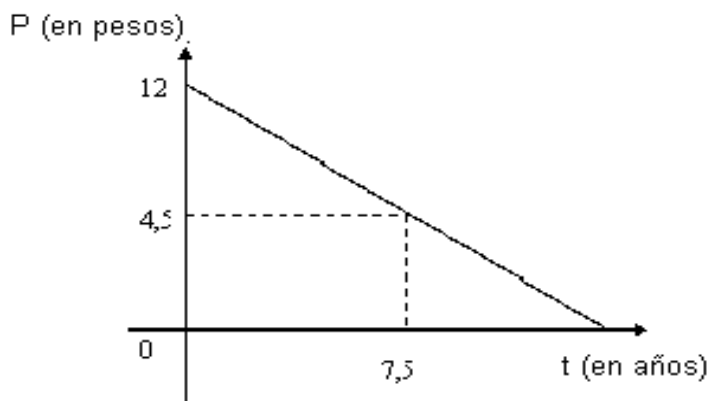
$$m = \frac{5 - (-2)}{2 - 4} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = -\frac{7}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y - 10 = -7(x - 2) \Rightarrow 2y - 10 = -7x + 14$$

Pasamos a forma general de tal manera que el coeficiente de x sea positivo así:  $7x + 2y = 24$

**EJERCICIO 3:** Halle la ecuación general de la recta con las siguientes condiciones:

1. Pasa por los puntos (1, -3) y (-3, 2)
2. Pasa por el punto (4, 3) y su pendiente es 3/2
3. Pasa por los puntos (1, 0) y (2,1)
4. Pasa por el punto (-2, -5) y su pendiente es -3
5. Su pendiente es 5 y la ordenada en el origen es 5/2
6. **PROBLEMA:** El valor de un artículo disminuye con el paso del tiempo según indica el gráfico,



**Sea P en miles de pesos**

Cuáles son las variables?

¿Cuál es la variable independiente?

¿Cuál es la variable dependiente?

¿Cuál es el precio inicial del artículo?

¿En qué año el precio del artículo fue \$ 4.5?

Cual será la ecuación que determina el precio del artículo?

¿Al cabo de cuántos años dicho artículo no tendría valor alguno?

7. La ecuación  $L = \frac{1}{10}t + 1,8$  representa el crecimiento de camarones juveniles en una etapa de su vida.
- Representa, en un sistema de coordenadas, el crecimiento de los camarones durante los 15 primeros días de vida, sabiendo que en el eje de las abscisas puedes indicar el tiempo  $t$  (en días) y en el de las ordenadas, la longitud total  $L$  e los camarones (en mm).
  - ¿Cuántos días tendrán que transcurrir para que la longitud de los camarones sea de 3,0 mm?
  - ¿Qué longitud tenían los camarones en el momento de: nacer?, a los 5 días de nacidos?, a los 10 días?, a los 20 días?

8. La fórmula  $F = \frac{9}{5}C^\circ + 32$  permite convertir temperatura de grados Celsius a grados Fahrenheit.


- ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?
- Utiliza la fórmula para completar la tabla.

C°	5	10	0	100			15
F					90	0	

9. La siguiente tabla muestra el tiempo  $t$  (en segundos) empleado por un móvil desplazándose a velocidad constante para recorrer un distancia en metros.

t	0	1	2			8		10
d	20	50	80	75	200		110	

- Halle la ecuación del desplazamiento ( $d$ ) del móvil con respecto al tiempo.
  - Completa la tabla, suponiendo que se mantiene l velocidad.
  - ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?
  - En esta ecuación lineal que significa la pendiente? Y la ordenada en el origen?
  - Muestre la situación problema en una gráfica en un intervalo de tiempo  $[0, 4]$ .
10. La administración de una empresa paga a sus trabajadores un salario mensual de  $P$  pesos (\$P). Este salario es el resultado de una asignación fija de \$ 500.000, más \$2.500 por cada una de las horas ( $h$ ) extras que trabaja.
- Escribe la ecuación de la función que relaciona el salario  $P$  con la cantidad  $h$  de horas extras realizadas por un trabajador.
  - Calcula el salario devengado por un trabajador en un mes si trabajó 30 horas extras.
  - Al finalizar otro mes el trabajador devengó \$ 550000. ¿Cuántas horas extras trabajó ese mes?
11. La ecuación  $y = 50t + 60$ , describe el proceso de llenado de una piscina desde el momento en que se abren las llaves para llenarla, **y: cantidad de agua (en miles de litros), t: tiempo transcurrido (en horas)**
- Representa gráficamente, el proceso de llenado de la piscina, durante las cuatro primeras horas.
  - ¿Qué cantidad de agua tenía la piscina, cuando se abrieron las llaves?
  - Si se comenzó a llenar la piscina a las 8:00 PM, ¿qué cantidad de agua tenía a la 1:00AM?
  - Si el tiempo en llenarse totalmente la piscina fue de 8 horas, ¿qué capacidad tiene la piscina?
12. A medida que el tiempo pasa, desde el momento de compra hasta el momento de venta, una máquina se deprecia, es decir va perdiendo su valor. Una empresa calculó que el valor de una máquina, al finalizar  $t$  años, estaba dada por la ecuación  $y = 15.000 - 1.500t$ , donde  $y$  representa el precio de la máquina en dólares.
- ¿Cuál fue el costo inicial de la máquina?
  - ¿Cuál es el precio de la máquina a los dos años de haber sido comprada?
  - Representa gráficamente la función que representa la relación precio -tiempo transcurrido.
13. Escribe como una ecuación cada una de las correspondencias que te damos a continuación y di en cada caso cuál es la variable dependiente y la independiente.
- La longitud  $L$  del lado de un cuadrado en función de su perímetro  $p$ .
  - La cantidad  $C$  de agua (en litros) contenida en un tanque que tiene 15L de agua, en función del tiempo  $t$  (en min.), si por cada minuto que transcurre entran al tanque 3L de agua.

	<b>MODELO DE FORMACIÓN POR PROCESOS Y VALORES CRISTIANOS</b>	
	<b>ÁREA DE MATEMÁTICAS</b>	
	<b>TALLER N°2. TEMA: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.</b>	
	<b>Versión 1.0</b>	Fecha última actualización 01/09/ 2011

Fecha: \_\_\_\_\_ Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_  
Grado: \_\_\_\_\_ Maestros: **Iván de J. Valencia Orozco, Lyda Rodríguez T.** DURACIÓN: IIP

**Eje Articulador:** Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

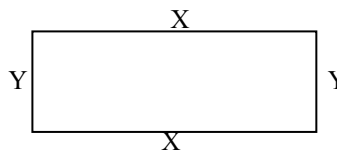
META	VALOR.	FIRMA DE ACUDIENTES
Aprendo a resolver sistemas de ecuaciones lineales dos por dos y tres por tres para el desarrollo de mi pensamiento, y lo demuestro al plantear y resolver problemas que me permitan aplicar mis conocimientos.		

**SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.  
SITUACION PROBLEMA**

Un pequeño agricultor desea cercar un lote rectangular de terreno. Si usa un material que cuesta \$300 el metro para el frente del lote y un material que cuesta \$200 el metro para los otros tres lados, la cerca le cuesta \$ 59000. Si usa el material más caro para los cuatro lados, la cerca le cuesta \$78000. ¿Cuáles son las dimensiones del lote?

**Analicemos para comprender el problema (interpretar)**

- ¿De qué se trata en el problema? Cercar un terreno rectangular del que no se conocen sus dimensiones.
- ¿Qué datos se dan? Precio de los materiales que se van a usar y costo total.
- ¿Qué se busca? Las dimensiones del terreno.
- ¿Es necesario usar variables? Si
- ¿Que denotan? Las dimensiones del terreno.
- ¿Es recomendable hacer un esbozo grafico? Si
- ¿Son suficientes los datos? Si



Para la solución debemos tener en cuenta:

¿Qué relaciones se pueden establecer entre los datos y las variables? Se pueden simplificar?

$$\left. \begin{array}{l} 300x + 200x + 200(2y) = 59000 \\ 300(2x) + 300(2y) = 78000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 500x + 400y = 59000 \\ 600x + 600y = 78000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 4y = 590 \\ 6x + 6y = 780 \end{array} \right\} \Rightarrow ?$$

¿A qué modelo matemático le conduce el problema?

**A UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES  
LLAMADO SISTEMA 2X2**

**SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales, cada una de ellas con dos o más incógnitas.

**Solución de sistemas de ecuaciones:**

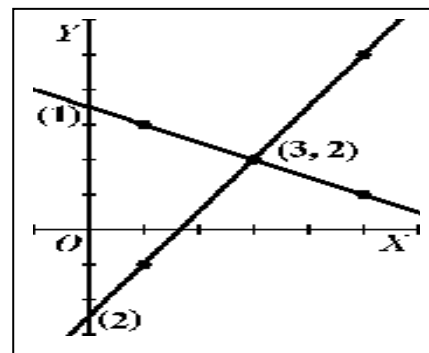
**Método gráfico:** Un sistema de dos ecuaciones lineales, con dos variables, se soluciona gráficamente determinando el conjunto de todos los pares ordenados que corresponden a la intersección de las gráficas de las dos ecuaciones lineales. El sistema puede tener:

¿Cuales serán las ecuaciones de este sistema?

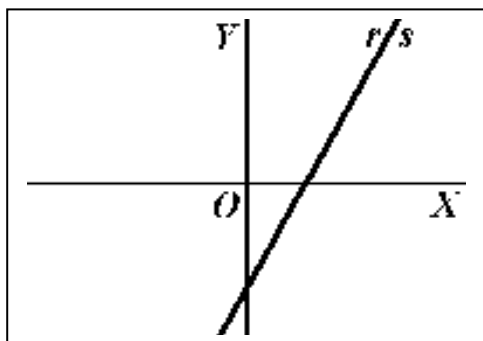
**Determinélas con uno de los métodos siguientes.**

El sistema tendrá:

- Una única solución  $\Rightarrow$  Las rectas se cortan en un punto ( $m_1 \neq m_2$ )

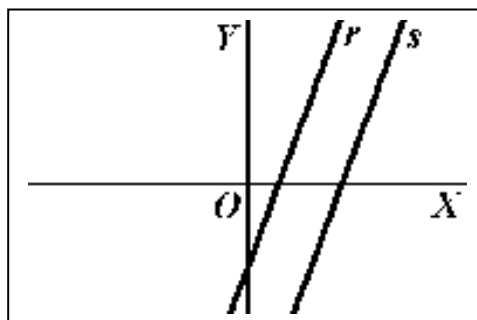


- **Infinitas soluciones**  $\Rightarrow$  Las rectas coinciden, es decir, son iguales.  
( $r = s \Rightarrow m_1 = m_2 \wedge b_1 = b_2$ )



- **Ninguna solución**  $\Rightarrow$  Las rectas no se cortan (rectas paralelas)

$$r \parallel s \Rightarrow m_1 = m_2 \wedge b_1 \neq b_2$$



La expresión general de un sistema de ecuaciones lineales es

$$\left. \begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned} \right\}$$

**SISTEMAS EQUIVALENTES** (sistemas de ecuaciones lineales con la misma solución) realizando operaciones aritméticas en los dos miembros de las ecuaciones del sistema, bien por el mismo número o bien por la misma expresión algebraica.

**Ejemplo:**  $\left. \begin{aligned} 2x - 9y &= -5 \\ 6x + 4y &= 2 \end{aligned} \right\}$  es equivalente al sistema  $\left. \begin{aligned} 2x - 9y &= 5 \\ 3x + 2y &= 1 \end{aligned} \right\}$  Se sacó mitad a la 2ª ecuación.

**MÉTODO DE SUSTITUCIÓN** Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables:

1. Despejamos cualquiera de las dos variables en una de las ecuaciones dadas.
2. Una vez encontrado el valor de la variable, lo sustituimos por su igual en la otra ecuación.
3. Resolvemos la ecuación resultante con una variable y reemplazamos el valor obtenido, en alguna de las ecuaciones originales y hallamos el valor de la otra variable.

**Ejemplo:** Resolver el siguiente sistema por el método de sustitución  $\left. \begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ 4x + y &= 14 \end{aligned} \right\}$

1. Despejamos una de las incógnitas, en este caso de la segunda ecuación:  $y = 14 - 4x$
2. Sustituimos la expresión obtenida en la otra ecuación:  $3x - 2 \cdot (14 - 4x) = 5$
3. Resolvemos la ecuación de primer grado con una incógnita:  
 $3x - 28 + 8x = 5 \Rightarrow 11x = 33 \Rightarrow x = 3$
4. Calculamos el valor de la otra incógnita sustituyendo el valor de la hallada:  
 $y = 14 - 4 \cdot (3) = 14 - 12 = 2 \Rightarrow$  **SOLUCIÓN DEL SISTEMA:  $x = 3, y = 2$**

**MÉTODO DE IGUALACIÓN:**

1. Despejamos la misma variable en cada ecuación
2. Igualamos las dos expresiones
3. Resolvemos la ecuación resultante en una variable y reemplazamos el valor obtenido, en alguna de las ecuaciones originales y hallamos el valor de la otra variable.

**Ejemplo:** Resolver el siguiente sistema por el método de igualación  $\left. \begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ 4x + y &= 14 \end{aligned} \right\}$

1. Despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones, en este caso la  $y$  en ambas ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{5 - 3x}{-2} \\ y &= 14 - 4x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y &= \frac{3x - 5}{2} \\ y &= 14 - 4x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &2. \text{ Igualamos ambas expresiones: } \frac{3x - 5}{2} = 14 - 4x \\ &3. \text{ Resolvemos la ecuación de primer grado con una incógnita:} \end{aligned}$$

3. Resolvemos la ecuación de primer grado con una incógnita:  
 $3x - 5 = 2 \cdot (14 - 4x) \Rightarrow 3x - 5 = 28 - 8x \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 3x + 8x = 28 + 5 \Rightarrow 11x = 33 \Rightarrow x = 3$

4. Calculamos el valor de la otra incógnita sustituyendo el valor de la hallada en una de las ecuaciones del primer paso:  $y = 14 - 4 \cdot (3) = 14 - 12 = 2 \Rightarrow$  **SOLUCIÓN DEL SISTEMA:  $x = 3, y = 2$**

**MÉTODO DE ELIMINACIÓN O REDUCCION:**

Si las ecuaciones están expresadas en la forma  $Ax+By=C$ , el sistema se puede resolver así:

1. Multiplicamos una o ambas ecuaciones por un número, tal que los coeficientes de una variable sean del mismo valor pero con signo contrario. Dicho coeficiente será el mcm de los coeficientes de la variable escogida
2. Adicionamos las dos ecuaciones para obtener otra ecuación con una variable. Resolvemos para la incógnita existente.
3. Sustituimos el valor encontrado en una de las ecuaciones originales y despejamos la segunda variable.

**Ejemplo:** Resolver el siguiente sistema por el método de reducción 
$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ 4x + y = 14 \end{array} \right\}$$

1. Hallamos un sistema de ecuaciones equivalente en el que, en este caso, se igualen las  $y$ . Para ello, multiplicamos la segunda ecuación por 2: 
$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ 8x + 2y = 28 \end{array} \right\}$$
 2. Sumamos las dos ecuaciones para reducir una

incógnita (para que se vayan las  $y$ ): 
$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ 8x + 2y = 28 \end{array} \right\} \Rightarrow 11x + 0y = 33$$

3. Resolvemos la ecuación de primer grado con una incógnita:  $11x = 33 \Rightarrow x = 3$
4. Calculamos el valor de la otra incógnita sustituyendo el valor de la hallada:  $3 \cdot (3) - 2y = 5 \Rightarrow -2y = -4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$  **SOLUCIÓN DEL SISTEMA:  $x = 3, y = 2$**

**MÉTODO POR DETERMINANTES O REGLA DE CRAMER**

A partir del sistema de ecuaciones 
$$\left. \begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$  **Determinante del sistema**  $\begin{vmatrix} a & \dots & b \\ d & \dots & e \end{vmatrix} = a \cdot e - b \cdot d = \Delta$  formado por los coeficientes de “ $x$ ” y “ $y$ ”

$\Rightarrow$  **Determinante de X**  $\begin{vmatrix} c & \dots & b \\ f & \dots & e \end{vmatrix} = c \cdot e - b \cdot f = \Delta_x$  intercambiando en el determinante del sistema, los coeficientes de  $X$  por los términos independientes.

$\Rightarrow$  **Determinante de Y**  $\begin{vmatrix} a & \dots & c \\ d & \dots & f \end{vmatrix} = a \cdot f - d \cdot c = \Delta_y$  intercambiando en el determinante del sistema, los coeficientes de  $Y$  por los términos independientes.

$\Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

**Ejemplo:** Resolver el siguiente sistema usando regla de Cramer. 
$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ 4x + y = 14 \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$  **Determinante del sistema**  $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & \dots & -2 \\ 4 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 3(1) - 4(-2) = 3 + 8 = 11$

$\Rightarrow$  **Determinante de X**  $\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & \dots & -2 \\ 14 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 5(1) - 14(-2) = 5 + 28 = 33$

**Determinante de Y**  $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & \dots & 5 \\ 4 & \dots & 14 \end{vmatrix} = 3(14) - 4(5) = 42 - 20 = 22 \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{33}{11} = 3, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{22}{11} = 2$

$\Rightarrow$  **SOLUCIÓN DEL SISTEMA:  $x = 3, y = 2$**

**EJERCICIO 4.** Resolver los sistemas por el método indicado en cada caso.

**1. RESOLVER POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN LOS SIGUIENTES SISTEMAS DE ECUACIONES:**

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 3x + 2y = 5 + 4y \\ 7x + y = 5 + 6x \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 9 \cdot (y + 2x + 2) = 4 \cdot (4x + y - 1) \\ 2 \cdot (x + y) - (x - y) = y - 1 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{g) } \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$$

**2. RESOLVER POR EL MÉTODO DE REDUCCIÓN LOS SIGUIENTES SISTEMAS DE ECUACIONES:**

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - 3y = 15 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 3 - 2(x - 4) = 5y + 6 \\ 5x - 3y = 12x - (4 - y) \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 6x - 2y = 10 \\ 4x + 5y = -6 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \quad \text{g) } \begin{cases} 4x - 3y = 26 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \quad \text{h) } \begin{cases} 7x - 3y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

**3. RESOLVER POR EL MÉTODO DE IGUALACIÓN LOS SIGUIENTES SISTEMAS DE ECUACIONES:**

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2y - x - 1 = 4 - y - 2x \\ 2x - y = 1 + x \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 + x + 2y \\ x - 2y - 3 = 3 - 4y \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 6x + 6y = 5 \end{cases}$$

**4. RESOLVER POR EL MÉTODO DE CRAMER LOS SISTEMAS DE ECUACIONES:**

1 a) b) c) 2 a) b) c) 3 a) b) c)

**5. RESOLVER, POR EL MÉTODO MÁS APROPIADO, LOS SIGUIENTES SISTEMAS DE ECUACIONES:**

(**Recuerda** que para quitar los denominadores reducimos todos los términos de cada ecuación lineal al mismo denominador, con el m.c.m de los denominadores, y hallamos los nuevos numeradores)

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y-1}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y-1}{2} = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{x+y}{3} = 9 + \frac{x-y}{2} \\ \frac{x}{2} - 5 = -\frac{x+y}{9} \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - 3y = 1 \\ \frac{3x}{4} - y = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{y+2x+2}{4} = \frac{4x+y-1}{9} \\ 2 \cdot (x+y) - (x-y) = y-1 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} \frac{x+3}{2} + \frac{y+3}{4} = 1 \\ \frac{1-x}{2} - \frac{2-y}{6} = 1 \end{cases} \quad \text{g) } \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}y = -1 \\ 2x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

**6.** Resuelve el sistema de la situación problema de la página 10.

**SOLUCION DE PROBLEMAS APLICANDO SISTEMAS DE ECUACIONES.**

**Ejemplo:** En una jaula hay conejos y palomas, pueden contarse 35 cabezas y 94 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

**Solución**

Llamamos  $x$  al número de conejos, y al número de palomas  $\Rightarrow$  habrá  $x + y = 35$  animales

Lo conejos tienen 4 patas,  $\Rightarrow$  hay  $4x$  patas de conejos

Las palomas tienen 2 patas,  $\Rightarrow$  tendremos  $2y$  patas de palomas

El número de patas en total es 94  $\Rightarrow 4x + 2y = 94$  patas.

$\Rightarrow$  **Formamos el sistema** 
$$\left. \begin{array}{l} x + y = 35 \\ 4x + 2y = 94 \end{array} \right\}$$
 y lo resolvemos por cualquier método, así:

Podemos escoger el de sustitución. Despejemos  $y$  en la ecuación 1 y sustituimos este valor en ec 2.

$$\Rightarrow y = (35 - x) \Rightarrow 4x + 2(35 - x) = 94$$


$$\Rightarrow 4x + 70 - 2x = 94 \Rightarrow 2x = 94 - 70 = 24$$

$$\Rightarrow x = 24 / 2 = 12 \text{ Conejos}$$

$$\Rightarrow y = 35 - 12 = 23 \text{ Palomas}$$

**EJERCICIO 5.** Resuelva los siguientes problemas usando sistemas de ecuaciones.

1. Las dos cifras de un número suman 12. Si restamos del número dado el que resulta de invertir sus cifras obtenemos 18. Calcula el número dado. **(El número buscado es 75).**
2. Queremos distribuir entradas de teatro entre varios chicos. Si a cada uno le damos 4 entradas nos faltan 3, pero si a cada uno le damos 3 nos sobran 9. ¿Cuántos chicos hay y de cuántas entradas disponemos? **(12 chicos y disponemos de 45 entradas).**
3. Dos amigos vienen del mercado de comprar naranjas. Antonio le dice a Pilar: «Si tú me das un kilo tendremos los dos la misma cantidad». A lo que Pilar le contesta: «Si tú me das a mí un kilo yo tendré doble número de kilos que tú». ¿Cuántos kilos compraron cada uno? **(Antonio compró 5 kilogramos, y Pilar 7).**
4. En un parqueadero hay 452 vehículos entre coches y motos. Halla el número de vehículos que hay de cada tipo sabiendo que en total suman 1.744 ruedas apoyadas en el suelo. **(420 coches y 32 motos).**
5. Un comerciante compro 4 impresoras y 7 computadores por \$ 11.5 millones y más tarde, a los mismos precios compro 8 impresoras y 9 computadores por \$ 15.5 millones. Hallar el costo de una impresora y el de un computador.
6. Un niño gasta \$14800 utilizando 60 monedas de \$100 y \$500. Cuántas monedas de cada denominación hay de cada una? **(38 de \$100 y 22 de \$500).**
7. Juana es 5 años mayor de lo que dice ser. Ella dice que es 12 años más joven que su esposo. Su esposo, hombre veraz, dice que ella tenía  $\frac{3}{4}$  de la edad de él cuando se casaron hace 20 años. Cuales son sus edades actuales? **(56 y 68 años).**
8. La razón entre dos números es de 3 a 4. Si el menor se aumenta en 7 y el mayor se disminuye en 6, la nueva razón será de 11 a 7. Halle los números. **(15 y 20).**
9. Hace 10 años la edad de Pacho era el doble de la de Camilo. Dentro de 10 años la edad de Camilo será los  $\frac{3}{4}$  de la de Pacho. Halle las edades actuales. **(Pacho 30 y Camilo).**
10. La suma de dos capitales es de \$300000 y la suma de los intereses producidos es de \$18600. Cuáles son los capitales si se sabe que el primero se prestó al 5% y el segundo fue prestado al 8%?
11. Dos ángulos son complementarios y el triple de la diferencia de los dos es de 12 veces el ángulo menor. Cuánto mide cada ángulo?
12. Las dimensiones de un rectángulo están en razón de 1 a 2 y su perímetro es de 240 metros. Hallar las dimensiones. Si se cerca con estacas de tres alambres de \$580 el metro, cuánto costará la cerca?

	<b>MODELO DE FORMACIÓN POR PROCESOS Y VALORES CRISTIANOS</b>	
	<b>ÁREA DE MATEMÁTICAS</b>	
	<b>TALLER N°3. TEMA: TÉRMINOS ESTADÍSTICOS. ARREGLO Y PRESENTACIÓN DE MUESTRAS Y SUS ESTADÍGRAFOS.</b>	
	<b>Versión 1.0</b>	Fecha última actualización 01/09/ 2011

Fecha: \_\_\_\_\_ Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_  
Grado: \_\_\_\_\_ Maestros: **Iván de J. Valencia Orozco, Lyda Rodríguez T.**

**Eje articulador:** Pensamiento aleatorio y sistemas de datos

META DE CALIDAD	VALORACIÓN	FIRMA DE ACUDIENTES
Aplico los conceptos estadísticos sobre clasificación de variables, distribución de frecuencias, gráficos y estadígrafos para analizar y dar solución a situaciones problema, fortaleciendo mis operaciones mentales.		

**INTRODUCCION.**

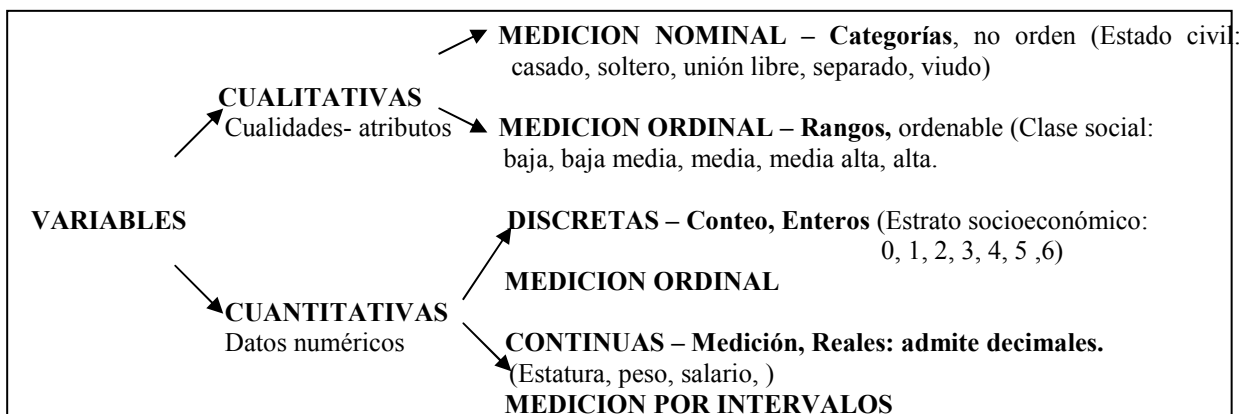
**La estadística, sus aplicaciones y sus ramas.**

La estadística se ocupa de los métodos y procedimientos para recoger, clasificar, resumir y evaluar los datos de una muestra o población con la finalidad de ayudar a la toma de decisiones y en tal caso formular teorías. La estadística se clasifica en:

**Estadística descriptiva** cuando los resultados no pretenden llegar a profundizar mas allá del conjunto que se investigó, se queda en el análisis y descripción de la muestra.

**Estadística Inferencial** que se apoya en el calculo de probabilidades para efectuar diversas estimaciones, decisiones y predicciones sobre un grupo mayor de datos que conforman una población.

**VARIABLE ESTADISTICA** es una característica que puede tomar cualquier valor en los distintos elementos o individuos de una muestra o población determinada y se clasifica así:



**EJERCICIOS 1.**

1. Clasifica las siguientes variables como cuantitativas o cualitativas y su nivel de medición  
Deporte preferido. Talla de pantalón. Color de pelo. Estado civil. Tiempo que toma armar un rompecabezas. Número de estudiantes en un salón de primer grado. Evaluación del desempeño de un político recién elegido (excelente, bueno, regular o malo). Departamento donde vive una persona.
2. Indica cuales de las siguientes variables cuantitativas son discretas y cuales son continuas:  
Población en un área particular de Colombia. Número de primos. kilómetros recorridos por dos atletas. Número de ventanas de una casa. Peso de los periódicos recuperados para reciclaje en un día. Tiempo para terminar un examen de matemática. Número de consumidores en una encuesta aplicada a 1000 personas que consideran importante la información nutricional que contienen los empaques de los productos alimenticios.
3. En cada uno de los siguientes enunciados identifica: La población estadística, la muestra aleatoria, La variable estadística. Dar dos datos e indicar si son datos numéricos o cualitativos.

- a) En una investigación para estudiar las habilidades de los estudiantes de 10 a 12 años de edad de la ciudad de Cali, se propuso una prueba a 500 estudiantes.
- b) Una finca de café tiene cultivados 50.000 arbustos de esta rubiácea. Con el fin de estudiar como los ha afectado la roya se tomaron 1.000 de ellos.
- c) Jorge es muy aficionado al fútbol. Desea hacer una encuesta en el colegio Americano para verificar si es verdad que el América es el equipo de las preferencias.

4. Determine las categorías de las siguientes variables: Religiosidad, sexo, nacionalidad, profesión, tipo de líder, nivel de reconocimiento de animales en un grupo de niños.

**FRECUENCIAS.**

**Frecuencia absoluta** es el número de veces que se repite un dato o registro de la variable, así, al preguntársele por su edad en años a un grupo de 17 niños respondieron: 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11 la frecuencia de la edad 9 años es 5 (se repitió 5 veces).

La frecuencia absoluta se simboliza con las letras minúsculas  $f$  o  $n_i$

La suma de las frecuencias absolutas es igual al total de la muestra (N):  $\sum f = N$

**Frecuencia relativa (decimal o porcentual)** es el cociente obtenido entre la frecuencia de cada dato y el total de la muestra. La simbolizamos con las letras minúsculas  $fr$  o  $h_i$

Así,  $fr = f/N \times 100\%$  y  $\sum fr = 100\%$ .

**Frecuencias acumuladas** se obtienen sumando una a una **las frecuencias absolutas y relativas** cuando la variable es de **medición ordinal o por intervalos**. Se simbolizan respectivamente con las letras mayúsculas  $N_I$  y  $H_I$ .

**EJERCICIO 2:** Agrupe los datos correspondientes a las edades anteriores en una tabla de frecuencias absolutas y acumuladas.

**AGRUPACION DE MUESTRAS.**

Los datos o registros de la variable seleccionados de una muestra, se organizan en una tabla o distribución de frecuencias por categorías o por rangos según como se clasifique la variable (nivel de medición nominal, ordinal o por intervalos).

**DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS Y GRAFICAS SEGÚN EL NIVEL DE MEDICION DE LA VARIABLE.**

**A. MEDICION NOMINAL: Cuando la Variable es cualitativa y sus categorías no exigen orden.**

La tabla de frecuencias con variable de medición nominal no lleva frecuencias acumuladas y siempre tiene el siguiente encabezado:

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
----------	---------------------	---------------------

**EJERCICIO 3:** Los 150 empleados de la empresa “A”, se clasifican según su estado civil y sexo así: 50 solteros (28 hombres, 22 mujeres), 62 casados (52 hombres, 10 mujeres), 22 separados (17 hombres, 5 mujeres), 4 viudos (3 hombres, 1 mujer), 12 unión libre (10 hombres, 2 mujeres).

- a) Elabore la tabla, diagrama circular y diagrama a barras clasificando los empleados según su estado civil
- b) Elabore tabla de frecuencias y gráfica de barras que muestre estado civil y sexo – Tabla con dos variables
- c) Que porcentaje **de los empleados** son: casados? Mujeres solteras?
- d) Que porcentaje **de las mujeres** son: casadas? , viven en unión libre?
- e) Que porcentaje **de empleados casados** son hombres?

**B. MEDICION ORDINAL: Cuando la Variable es cualitativa ordenable o variable discreta.**

La tabla de frecuencias tendrá el siguiente encabezado:

VARIABLE $X_i$	F. ABSOLUTA $n_i$	F. RELATIVA $h_i$	F. ACUMULADAS		$n_i \cdot x_i$
			$N_I$	$H_I$	

**Ejemplo:** Supongamos que el número de estudiantes de sexto grado de educación básica en la Comuna 9 de Cali es 3000. Se desea conocer el nivel de rendimiento en matemáticas mediante un examen calificado como deficiente (nota 1), insuficiente (2), aceptable (3), sobresaliente (4) y excelente (5). Por motivo de tiempo y personal disponible se toma la decisión de evaluar el 10% de los estudiantes seleccionados aleatoriamente (300 estudiantes), obteniéndose el siguiente resultado: 20 excelentes, 80 sobresalientes, 120 aceptables, 50 insuficientes y 30 deficientes.

**DISTRIBUCION DE LAS VALORACIONES EN MATEMATICAS A UN GRUPO DE 300 ESTUDIANTES DE LA COMUNA 9 DE CALI.**

NOTAS (Xi)	n <sub>i</sub> ALUMNOS	h <sub>i</sub> %	N <sub>i</sub>	H <sub>i</sub> %	n <sub>i</sub> ·x <sub>i</sub>
1	30	10,0	30	10,0	30
2	50	16,7	80	26,7	100
3	120	40,0	200	66,7	360
4	80	26,7	280	93,4	320
5	20	6,7	300	100	100
<b>TOTAL</b>	300	100	///////	///////	910

Fuente: Datos primarios.

**INTERPRETACIONES.**

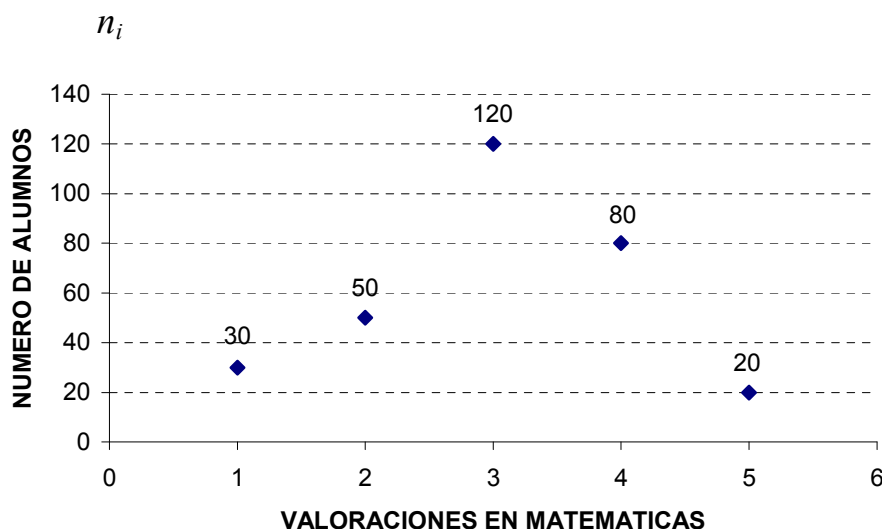
Observamos que:

- n<sub>4</sub>: 80 alumnos (26,7%) sacaron nota sobresaliente (4).
- N<sub>3</sub>: 200 alumnos (66,7%) sacaron nota por debajo de sobresaliente (hasta 3)
- El 73,4% de los alumnos (220) ganaron la prueba (Sacaron nota 3 ó más).
- La nota promedio es:  $\bar{x} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{N} = \frac{910}{300} = 3$

Las tablas de frecuencias de medición ordinal se pueden representar mediante gráficos a segmentos y polígonos de frecuencias.

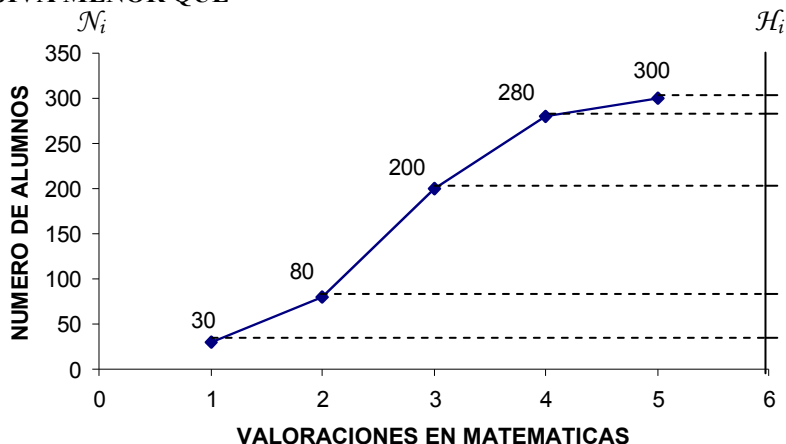
Los polígonos de frecuencias absolutas y relativas acumuladas se llaman **OJIVAS** (determinan valores por debajo de... o menores que...)

**DIAGRAMA A SEGMENTOS:** Se construyen un par de ejes perpendiculares, colocando en el eje horizontal los valores X<sub>i</sub> que toma la variable y en el eje vertical se distribuye proporcionalmente las frecuencias absolutas, relativas o acumuladas. En cada punto de X<sub>i</sub> se levanta un segmento de altura igual a la frecuencia correspondiente. Así:



**POLÍGONOS DE FRECUENCIAS:** Se obtiene uniendo con segmentos los puntos correspondientes a las frecuencias de cada X<sub>i</sub>. Si el polígono es de frecuencias acumuladas, su gráfica se llama **OJIVA**. Así:

**OJIVA MENOR QUE**



**MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL PARA MUESTRAS DE VARIABLE DISCRETA.**

Un promedio es un valor que es típico o representativo de un conjunto de datos y generalmente tiende a ubicarse en el centro del conjunto de datos ordenados, por eso reciben el nombre de medidas de tendencia central; como la moda, la mediana y la media.

\* El rendimiento en matemática de los alumnos de 6º de la Comuna 9 de Cali es **ACEPTABLE**, porque la

nota promedio es  $\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{N} = \frac{910}{300} = 3$ . El promedio también se llama **MEDIA ARÍTMÉTICA** y

esta dada por la suma de datos dividida entre el total de datos.

En una tabla de frecuencias de medición ordinal, x<sub>i</sub> es el dato de la variable y n<sub>i</sub> es la frecuencia respectiva.

**LA MODA** es el dato con mayor frecuencia. La nota más común o repetida o de mayor frecuencia es 3 y se simboliza así:  $\hat{X} = 3$

**LA MEDIANA (Me) =  $\tilde{X}$**

La **mediana** es el valor (dato) que aparece en la “mitad” de una serie ordenada de datos. Divide la distribución en dos partes iguales, de tal manera que la mitad de los datos está por debajo y la otra mitad por encima de la Mediana.

La mediana es una medida de tendencia central propia de los niveles de medición ordinal y por intervalos.

En la tabla de frecuencias de medición ordinal la mediana es el primer valor de la variable x<sub>i</sub> que corresponde a la frecuencia absoluta acumulada N<sub>i</sub>, inmediatamente superior a la mitad del número de datos (N / 2).

En el caso que N / 2 coincida con una frecuencia acumulada, promediamos el dato correspondiente con el siguiente.

**La nota que está en la mitad de la muestra ordenada (valoraciones en matemática), ocupa el puesto 150 y es superado por primera vez por N = 200 y corresponde a la nota 3; significa que el 50% de estos alumnos tienen nota menor o igual a 3 y se simboliza así:  $\tilde{X} = 3$**

**\*PENSAMIENTO CRITICO:** Aproximadamente cuántos alumnos de la comuna 9 son sobresalientes en matemáticas?, cuántos tendrían rendimiento aceptable?, cuántos perderían la prueba?.

**EJERCICIO 4.** Elabore distribución de frecuencias y gráficos adecuados, según el nivel de medición de la variable, para los siguientes casos. Recuerde dar título y fuente a cada tabla.

1. Tras encuestar a 25 familias sobre el número de hijos que tenían, se obtuvieron los siguientes datos,

Nº de hijos(X <sub>i</sub> )	0	1	2	3	4
Nº de familias(n <sub>i</sub> )	5	6	8	4	2

Halle las medidas de tendencia central. Interprete n<sub>3</sub> h<sub>4</sub> N<sub>3</sub> H<sub>4</sub>.

2. En una encuesta por teléfono a 162 personas sobre la prensa que más leen, en una comuna de la ciudad de Cali, arrojó los siguientes resultados:  
El País 20, El Tiempo 40, El Caleño 52, El Espectador 35, Occidente 10, y La Patria 5.  
Fuente Publidadatos.  
Identifique la clase de variable y elabore tabla de frecuencias adecuada, diagrama circular y de barras.

**3. Presente este ejercicio en Excel.**

En el registro de faltas de asistencia al colegio, de un curso de 42 alumnos durante un año escolar se obtuvo el siguiente espacio muestral:

3, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 5, 3, 4, 1, 2, 3, 2, 5, 1, 3, 3, 3, 2, 4, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 6, 3, 4, 4, 1, 0, 0.

Cuántos alumnos faltaron más de 4 veces? Que porcentaje de alumnos faltaron 5 veces?, etc. Represente la información en un diagrama a segmentos, en un polígono de frecuencias absolutas y en una ojiva.

Halle las medidas de tendencia central. Interprete  $n_3$ ,  $h_4$ ,  $N_3$ ,  $H_2$ .

**4. Presente este ejercicio en Excel.**

En una encuesta a alumnos se les preguntó por su género y deporte preferido y se obtuvieron los siguientes datos: Fútbol 35 Hombres y 3 Mujeres, Basket 14 H y 38 M, Voleibol 10 H y 19 M, Atletismo 11H y 6 M y otros deportes 5 H y 8 M. Represente la información en una tabla de contingencia y en un diagrama de barras.

**C. MEDICION POR INTERVALOS**

**Se utiliza para variables continuas y para variables discretas con rangos muy numerosos**

Cuando el tamaño de la muestra y el recorrido de la variable son grandes, por lo que será necesario agrupar en intervalos los valores de la variable.

En una muestra el número de intervalos se puede escoger arbitrariamente entre 5 a 16 según su magnitud.

Recuerde que **variable continua** es aquella cuyos datos se originan de una medición, por lo tanto su cantidad admite números decimales. (Ejemplo: 1,65 metros de estatura).

Los **intervalos** son representaciones geométricas en la recta y sus **extremos se llaman límites reales (LRI – LRS)**, los cuales contienen los datos de la muestra de variable continua y **su punto medio lo llamaremos marca de clase ( $X_i$ )**. Generalmente los intervalos tendrán la misma longitud llamada **ancho de clase (c)** y **son continuos**.



**LRI = Limite Real Inferior.**

**LRS = Limite Real Superior.**

**Marca de clase =  $x_i = \frac{LRI + LRS}{2}$  y ancho de clase =  $c = LRS - LRI$**

**EJEMPLO:** Las edades de los estudiantes de Economía del III Semestre, plan nocturno de La Universidad de Antioquia, están distribuidas en intervalos así:

18 – 20 años, 4 estudiantes	24 – 26 años, 12 estudiantes	30 – 32 años, 20 estudiantes
21 – 23 años, 6 estudiantes	27 – 29 años, 24 estudiantes	33 – 35 años, 10 estudiantes.

**RECUERDE QUE LOS DATOS DE LA MUESTRA SE DISTRIBUYEN EN INTERVALOS REALES Y DEBEN SE SUCESIVOS.**

**Donde termina un intervalo empieza el otro.**

**TITULO: Edades de estudiantes de Economía – Nocturno – III Semestre de U. de A.**

EDAD (Años)	$X_i$	$n_i$ : estudiantes	$h_i$ %	$N_i$	$H_i$ %	$n_i * x_i$
17,5 – 20,5	19	4	5,3	4	5,3	76
20,5 – 23,5	22	6	7,9	10	13,2	132
23,5 – 26,5	25	12	15,8	22	29	300
26,5 – 29,5	28	24	31,6	46	60,6	672
29,5 – 32,5	31	20	26,3	66	96,9	620
32,5 – 35,5	34	10	13,2	76	100	340
<b>TOTAL</b>	//////	76	100	//////	//////////	2140

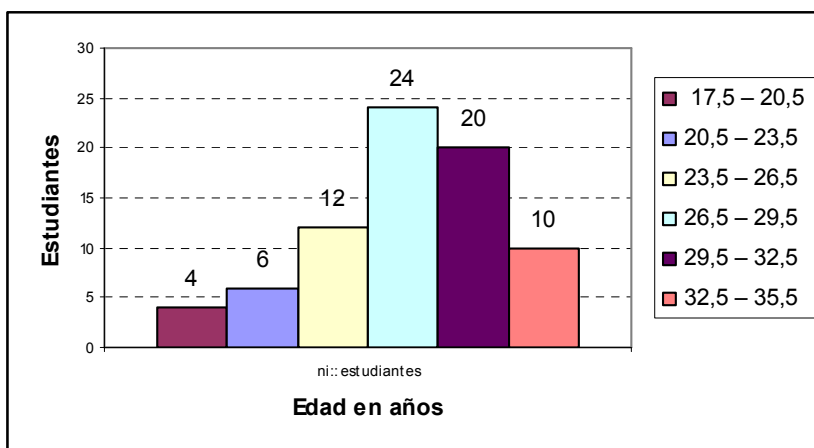
Fuente: Registro académico de la Universidad.

**GRAFICOS ESTADISTICOS.**

Cuando los datos provienen de una variable de **nivel de medición por intervalos**, se representa la información al menos en una de las siguientes **GRAFICAS: HISTOGRAMA, POLIGONO DE FRECUENCIAS U OJIVAS**

**EL HISTOGRAMA** sirve para representar gráficamente las frecuencias absolutas o relativas en una serie de rectángulos o barras, unidas entre sí, cuya altura expresa la frecuencia respectiva. El ancho de las barras es arbitrario, pero debe ser uniforme en todas. En el eje horizontal se ubican los límites reales de cada intervalo y en el eje vertical se distribuyen las frecuencias absolutas o relativas.

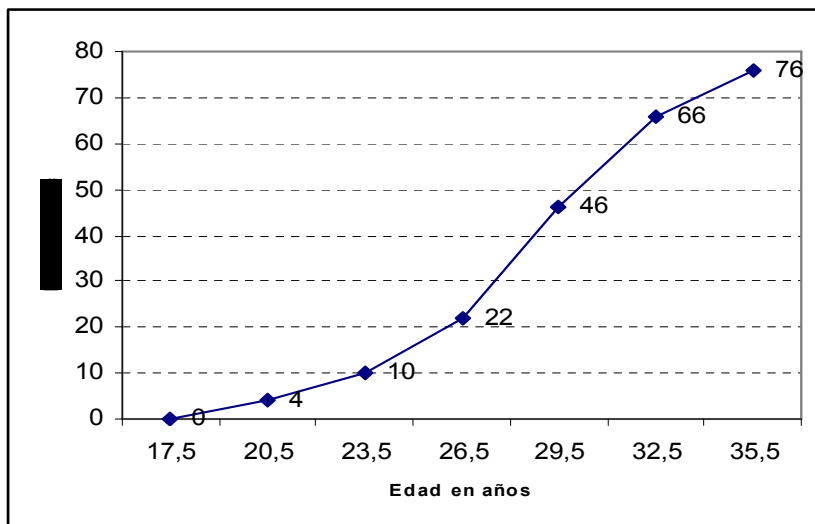
**HISTOGRAMA**



**EL POLIGONO DE FRECUENCIAS** es un gráfico de línea trazado sobre las marcas de clase. Puede obtenerse uniendo los puntos medios de los techos de los rectángulos en el histograma.

**LA OJIVA** es una gráfica correspondiente a un **polígono de frecuencias acumuladas**, donde el eje horizontal corresponde a **los límites reales superiores** de cada intervalo y el eje vertical a **las frecuencias acumuladas absolutas o relativas o ambas**. Se utiliza para visualizar datos que sean mayores o menores que un determinado punto. Si vamos a observar datos que estén por debajo de un límite superior de un intervalo, la ojiva se llama “**menor que**”

**OJIVA MENOR QUE**



**MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL EN MUESTRAS AGRUPADAS EN INTERVALOS.**

Son medidas representativas de la muestra que tienden a ubicarse en el centro de ella y son:

**LA MEDIA** que identifica el promedio de la muestra y se halla con la fórmula  $\bar{X} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{N}$  donde  $n_i$  y  $x_i$  son las frecuencias absolutas y marcas de clase respectivamente de cada intervalo y  $N$  es el total de la muestra.

Para el ejemplo anterior  $\bar{X} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{N} = \frac{2140}{76} = 28,15 = 28,2 \text{ años}$ .

INTERPRETACION: La edad promedio del grupo de estudiantes es aproximadamente de 28,2 años.

**LA MODA (Mo):** Dato aproximado que más se repite en la muestra, no representa la mayoría. También se simboliza con  $\hat{x}$

En una muestra agrupada por **intervalos** (variable continua), para hallar la moda aproximada podemos utilizar la fórmula:

$$Mo = LRI + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} * C$$

Donde

LRI = Limite Real Inferior de la **clase modal**\*.  
 $\Delta_1$  = Diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase anterior  
 $\Delta_2$  = Diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia siguiente  
 c = Ancho de la clase o intervalo modal.

\*CLASE MODAL = Intervalo con mayor frecuencia.

Para el ejemplo anterior “Edades de estudiantes de Economía – Nocturno – III Semestre de U. de A., la moda sería:

⇒ **Clase modal: [26,5 – 29,5]** por que la frecuencia más alta es →  $n_3 = 46$   
 $LRI = 26,5$      $\Delta_1 = n_3 - n_2 = 46 - 22 = 24$      $c = 3$      $\Delta_2 = n_3 - n_4 = 46 - 20 = 26$   
 ⇒  $Mo = 26,5 + \frac{24}{24 + 26} * 3$  ⇒  $Mo = 26,5 + \frac{12}{25} * 3 = 28,75 = 28,8 \text{ Años}$

INTERPRETACION: Los estudiantes con mayor edad tienen aproximadamente 28,8 años.

**LA MEDIANA (Me):** Dato aproximado que aparece en la mitad de la muestra, el 50% de la muestra es menor que la mediana, (está en el puesto  $N/2$ ).

**LA CLASE MEDIANA** es el intervalo que contiene la mediana.  
 Su  $N_i$  supera por primera vez a  $N/2$ .

Para el ejemplo LA CLASE MEDIANA es [26,5 – 29,5] por que su frecuencia acumulada  $N_i$  es 46 que supera por primera vez a  $N/2 = 76/2 = 38$

La mediana se halla con la fórmula:

$$Me = \tilde{x} = LRI + \frac{\frac{N}{2} - N_{(i-1)}}{n_i} * C \quad \text{Donde LRI} = 26,5 \text{ Límite real inferior de la clase mediana}$$

$N_{(i-1)} = 22$  Frecuencia acumulada anterior a la clase mediana  
 $n_i = 24$  Frecuencia de la clase mediana  
 $c = 3$  Ancho del intervalo

$$\Rightarrow Me = \tilde{x} = 26,5 + \frac{38 - 22}{24} * 3 = 26,5 + \frac{16}{24} * 3 = 28,5 \text{ Años}$$

**INTERPRETACION:** El 50% de los estudiantes de Economía del III Semestre de U.A. tienen edades menores que 28,5 años.

**EJERCICIO 5.**

En las siguientes muestras distribuidas en intervalos, realizar tablas de frecuencias, histogramas, polígonos de frecuencias y ojivas; interpretar  $n_2$   $h_4$   $N_4$   $H_3$ . Hallar la media, la moda y la mediana interpretando cada una.

1. Los pesos en libras de 40 deportistas DEL Club “X” están distribuidos así:

<b>Peso en libras <math>X_i</math></b>	<b>118 -127</b>	<b>128- 137</b>	<b>138 - 147</b>	<b>148 – 157</b>	<b>158 - 167</b>	<b>168- 177</b>
<b>Deportistas <math>n_i</math></b>	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>14</b>	<b>9</b>	<b>6</b>	<b>2</b>


2. Los salarios por hora cátedra, en miles de pesos de acuerdo a su escalafón, de 43 profesores de la Universidad Inca de Bogotá están distribuidos en los intervalos [ 12 – 14 ], [ 15 – 17 ], [ 18 – 20 ], [ 21 – 23 ], [ 24 – 26 ], [ 27 – 29 ] y sus frecuencias absolutas respectivamente son:4, 6, 9, 13, 8, 3.
3. Estaturas en pulgadas de 110 deportistas del Barrio Colseguros de Cali.

60 – 63 pulgadas, 5 deportistas                      72 – 75 pulgadas, 27 deportistas  
 64 – 67 pulgadas, 20 deportistas                    76 – 79 pulgadas, 13 deportistas  
 68 – 71 pulgadas, 45 deportistas

4. Edades en años de un grupo de pensionados, en intervalos, cuyas marcas de clase y frecuencias absolutas respectivamente son:

<b>Marcas de clase <math>x_i</math></b>	<b>49</b>	<b>54</b>	<b>59</b>	<b>64</b>	<b>69</b>	<b>74</b>
<b>Frecuencias <math>n_i</math></b>	<b>2</b>	<b>10</b>	<b>16</b>	<b>12</b>	<b>7</b>	<b>4</b>

5. Diámetro en mm de balines de un sistema mecánico:  
50,5 – 57,5: 4 balines; 57,5 – 64,5: 3 balines; 64,5 – 71,5: 10 balines; 71,5 – 78,5: 6 balines.  
78,5 – 85,5: 4 balines; 85,5 – 92,5: 4 balines.

	<b>MODELO DE FORMACIÓN POR PROCESOS Y VALORES CRISTIANOS</b>	
	<b>ÁREA DE MATEMÁTICAS</b>	
	<b>TALLER N°4. TEMA: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.</b>	
	<b>Versión 1.0</b>	Fecha última actualización 01/09/ 2011

Fecha: \_\_\_\_\_ Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_  
Grado: \_\_\_\_\_ Maestros: **Iván de J. Valencia Orozco, Lyda Rodríguez T.** **DURACIÓN: IIP**

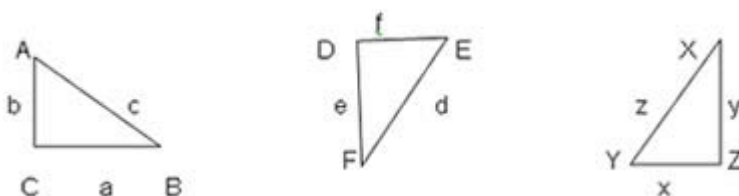
**Eje Articulador:** Pensamiento métrico y sistemas geométricos y de medidas

META DE CALIDAD	FIRMA PADRES
Relaciono conocimientos con nuevas ideas, empleando la consulta y la investigación sobre las razones trigonométricas, la circunferencia y el círculo.	

**RAZONES TRIGONOMETRICAS.**

**Introducción del tema:** Recuerde algunos conceptos y ejemplificando cuando sea necesario.

- ¿Qué es un triángulo rectángulo?
- ¿Qué han estudiado en cursos anteriores sobre esta clase de triángulos?.
- ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos interiores de un triángulo?
- ¿Qué es una razón?
- ¿Reconoces el lado adyacente, la hipotenusa y el lado opuesto de un ángulo agudo en el triángulo rectángulo?
- Dibujen 3 triángulos rectángulos diferentes, nómbralos y relaciona sus lados con el teorema de Pitágoras. (Los vértices se nombran con letras mayúsculas y el lado opuesto con la minúscula que le corresponde a ese vértice. Los ángulos pueden nombrarse con la letra del vértice o con las letras griegas, etc.:

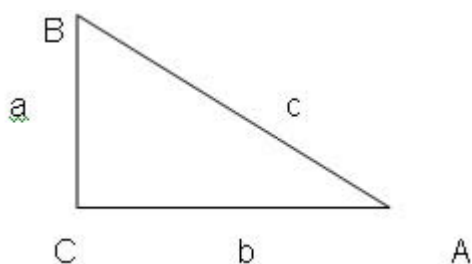


- Para el triángulo ACB Rectángulo en  $\angle C$  : Hipotenusa c. Lado adyacente al ángulo B, a. Lado adyacente al ángulo A, b. Lado opuesto al ángulo B, b. Lado opuesto al ángulo A, a. Teorema de Pitágoras:  
$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
- Realice este mismo proceso para los otros dos triángulos.

**RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO AGUDO DEL TRIANGULO RECTANGULO:**

Los cocientes entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, se denominan razones trigonométricas. Cada una recibe un nombre especial. **Las tres razones trigonométricas básicas** se llaman **SENO, COSENO Y**

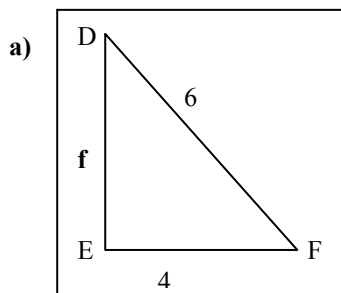
**TANGENTE** y las abreviamos con **Sen, Cos, Tan**. Observemos en el caso del  $\hat{A}$  :



$\text{Sen}\hat{A} = \frac{\text{Cateto..opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$ $\text{Cos}\hat{A} = \frac{\text{Cteto..adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$ $\text{Tan}\hat{A} = \frac{\text{Cateto..opuesto}}{\text{Catetoadyacente}} = \frac{a}{b}$
--

Halle las razones trigonométricas para  $\hat{B}$ . Compárelas con las de  $\hat{A}$ , sabiendo que A y B son ángulos complementarios.

**Ejemplos:** Halle el lado desconocido de l triángulo dado y determine las razones trigonométricas de sus ángulos agudos.



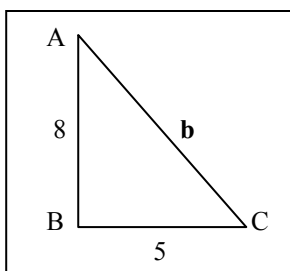
El lado desconocido es el cateto **f**

$$f = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Sen}\hat{F} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3} = \text{Cos}\hat{D} ; \text{Cos}\hat{F} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \text{Sen}\hat{D}$$

$$\text{Tan}\hat{F} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{Tan}\hat{D} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

b) Usando calculadora aproximando con una cifra decimal:



El lado desconocido es la hipotenusa **b**

$$b = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89} = 9,4$$

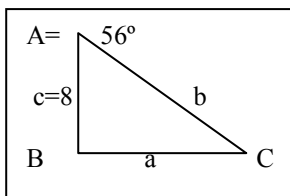
$$\text{Sen}\hat{C} = \frac{8}{9,4} = 0,9 = \text{Cos}\hat{A} ; \text{Cos}\hat{C} = \frac{5}{9,4} = 0,5 = \text{Cos}\hat{A}$$

$$\text{Tan}\hat{C} = \frac{8}{5} = 1,6 \quad \text{Tan}\hat{A} = \frac{5}{8} = 0,6$$

c) Usando calculadora científica halle las razones trigonométricas básicas de los siguientes ángulos aproximando con dos cifras decimales: 30° 60° 75° 20° 45° 15° 49° 25° 36° 85° 10° 58°

Sen 30° = 0,5    Cos 30° = 0,87    tan 30° = 0,58

d) En un triángulo ABC recto en B, A = 56°, Lado c = 8 cm. Complete sus medidas:



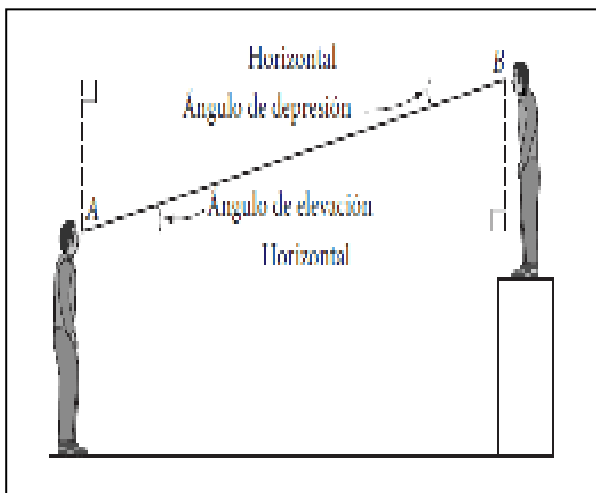
Conocemos el ángulo A y su lado adyacente c, usamos el Cos A.

$$\Rightarrow \text{Cos}56^\circ = \frac{\text{Adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{8}{b} \Rightarrow b = \frac{8}{\text{Cos}56^\circ} = \frac{8}{0,56} = 14,3\text{cm}$$

$$\Rightarrow \text{Tan}56^\circ = \frac{\text{Opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{8} \Rightarrow a = 8 \times \text{tan} 56^\circ = 11,9\text{cm}$$

Y  $\hat{C} = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$

NOTA:



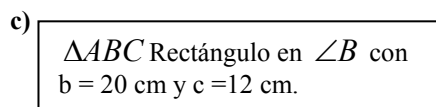
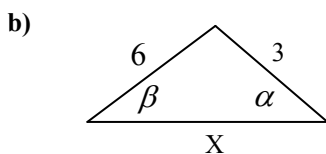
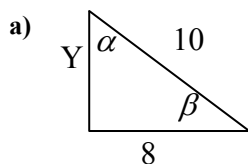
Si miras hacia arriba, el ángulo entre la horizontal y tu recta de visión al punto más alto de un objeto se llama **ángulo de elevación (A)**.

Si miras hacia abajo, el ángulo entre la horizontal y tu recta de visión al punto más bajo de un objeto se llama **ángulo de depresión (B)**.

**Midiendo estos ángulos podrás hallar alturas o distancias que forman triángulos rectángulos en situaciones problema dados.**

SITUACIONES PROBLEMA:

- 1) En los siguientes triángulos rectángulos, calcula las Tres razones trigonométricas básicas para sus ángulos agudos. ( Primero halle el lado desconocido usando teorema de Pitágoras)



- d)  $\Delta ABC$  Rectángulo en  $\angle B$  con  $c = 2\sqrt{3}$  y  $a = 2$  cm. (catetos).

- e)  $\Delta ABC$  Rectángulo en  $\angle B$  con  $b = 2\sqrt{13}$  y  $a = 4$  cm.

- f)  $\Delta ABC$  Rectángulo en  $\angle B$  con  $c = \sqrt{3}$  y  $a = \sqrt{6}$  cm. (catetos).

- g)  $\Delta ABC$  Rectángulo en  $\angle B$  con  $b = \sqrt{5}$  y  $c = 2$  cm.

- 2) Resolver un triángulo equivale a determinar el valor de los tres ángulos y los tres lados. A continuación se dan los tres mínimos que necesitarás para resolver cada triángulo.

- a)  $\text{sen } A^\circ = \frac{2}{5}$  y lado opuesto 8 cm.    b)  $\text{cos } B^\circ = \frac{2}{7}$  y la hipotenusa es 21 cm.    c)  $\text{Tan } D^\circ = \frac{5}{8}$  y lado adyacente es 48 cm.

- d) Tiene un ángulo de  $40^\circ$  y su cateto adyacente es de 5 cm

- e) Tiene un ángulo de  $33^\circ$  y su cateto opuesto es de 23 cm

- f) La hipotenusa mide 67 cm y uno de los catetos 43 cm

- 3) Dibuje un triángulo rectángulo nombrándolo con ABC, halle las razones de A y muestre que

$$\text{Tan } A = \frac{\text{sen } A}{\text{cos } A}.$$

- 4) Con la ayuda de un triángulo rectángulo isósceles de cateto “a” puedes calcular el valor de las razones trigonométricas del ángulo de  $45^\circ$ . Dibújalo y escribe tus cálculos.

- 5) Una persona a 4m del pie de un árbol observa su punta más alta ángulo de elevación de  $35^\circ$ . ¿Cuál es la altura del árbol?

- 6) La punta de un edificio de 24 m se observa con un ángulo de elevación de  $25^\circ$ . ¿Qué sombra proyecta?

- 7) Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento que está situada a 8m. del suelo y observa el edificio de enfrente. La parte superior con un ángulo de 30 grados y la parte inferior con un ángulo de depresión de 45 grados. Determine la altura del edificio señalado. ¿Con qué ángulo de depresión se observa un auto que está a una distancia de 200 m de una torre de 80m?

- 8) Desde un punto A en la orilla de un río, cuya anchura es de 50m., se ve un pino justo enfrente (en la otra orilla). ¿Cuánto tendremos que caminar río abajo, por la orilla recta del río, hasta llegar a un punto B desde el que se vea el pino formando un ángulo de  $60^\circ$  con nuestra orilla?

SELECCIONE LA RESPUESTA CORRECTA. (Realice procesos para justificar la solución)

- 1) ¿Qué altura tiene un árbol si proyecta una sombra de 20 m, cuando el ángulo de elevación del sol es de  $50^\circ$ ?  
a) 23,8 m    b) 12,8 m    c) 15,3 m    d) 16,8 m    e) 1,53 m

- 2) Sabiendo que  $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$ , entonces el valor de  $\text{cos } \alpha + \text{tg } \alpha - \text{sen } \alpha$  es:

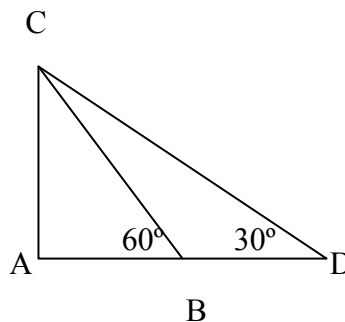
- a) 1,55    b) 0,95    c) 1,45    d) 1,95    e) N.A.

- 3) En la cima de un cerro se ha levantado una antena de telefonía celular. Desde un punto ubicado en el valle se miden los ángulos de elevación del extremo superior y la base de la antena. ¿Cuál es la altura del cerro si estos ángulos son  $57^\circ$  y  $42^\circ$  respectivamente y además la antena mide 80 m de alto?

- a) 100 m    b) 112,6 m    c) 154 m    d) 168,3 m    e) N.A.

- 4) ¿En qué ángulo de elevación está el sol si un edificio proyecta una sombra de 25 m y tiene una altura de 70 m?  
a)  $19,6^\circ$     b)  $20,9^\circ$     c)  $69^\circ$     d)  $70,3^\circ$     e) N.A.
- 5) Si  $\text{sen } \alpha = \frac{3}{7}$ , entonces el valor de la  $\text{tg } \alpha$  es:  
a)  $\frac{7}{3}$     b)  $\frac{2\sqrt{10}}{7}$     c)  $\frac{3\sqrt{10}}{20}$     d)  $\frac{2\sqrt{10}}{3}$     e) N.A.
- 6) En la figura,  $BD = 100$  dm. Entonces AC mide:

- a)  $150\sqrt{3}$  dm  
b)  $100\sqrt{3}$  dm  
c)  $50\sqrt{3}$  dm  
d)  $25\sqrt{3}$  dm  
e)  $15\sqrt{3}$  dm



**PROBLEMAS DE APLICACIÓN.**

- 1) Sobre un plano horizontal, un mástil está sujeto por dos cables, de modo que los tirantes quedan a lados opuestos. Los ángulos que forman estos tirantes con respecto al suelo son 27 grados y 48 grados. Si la distancia entre las cuñas es de 50 m. ¿cuánto cable se ha gastado?, ¿cuál es la altura a la cual están sujetos los cables?
- 2) Desde la cúspide de un faro de 80 m. De altura, se observan hacia el oeste dos botes según ángulos de depresión de  $60^\circ$  y  $30^\circ$ . Calcule la distancia que separa a los botes.
- 3) Determina la altura de un árbol, sabiendo que su sombra mide 8m cuando el ángulo de elevación del sol es de  $53^\circ$ . Haz un dibujo del problema.
- 4) Un avión se encuentra a 2300m de altura cuando comienza su descenso para aterrizar. ¿Qué distancia debe recorrer el avión antes de tocar la pista, si baja con un ángulo de depresión de  $25^\circ$ ? Haz un dibujo del problema.
- 5) Sobre un arrecife hay un faro cuya altura es de 7,5 m. Desde un punto situado en la playa se observa que los ángulos de elevación a la parte superior y a la parte inferior del faro son  $60^\circ$  y  $30^\circ$  grados. Calcule la altura del arrecife.
- 6) Un árbol ha sido roto por el viento de tal manera que sus dos partes forman con la tierra un triángulo rectángulo. La parte superior forma un ángulo de 35 grados con el piso, y la distancia, medida sobre el piso, desde el tronco hasta la cúspide caída es de 5 m.. halle la altura que tenía el árbol.