COLEGIO AMERICANO 1928 CALI IGLESIA PRESBITERIANA CUMBERLAND	**MODELO DE FORMACIÓN POR PROCESOS Y VALORES CRISTIANOS**		
	Área de Matemáticas		
	TALLER 1. INTERVALOS Y FUNCIONES		
	Versión 1.0	Fecha última actualización 01/09/ 2011	Página 1 de 5

Fecha: ______________________ Estudiante: ____

Grado: 11° Maestro: Miguel Adolfo Preciado Vélez

METAS DE CALIDAD	VALORACIÓN	FIRMA DE ACUDIENTES
➢ **Dimensión Cognitiva** Fortalezco mi desarrollo mental, al presentar argumentos sobre los procesos matemáticos para el aprendizaje de las funciones (entre ellas Valor Absoluto). ➢ **Pensamiento y Lenguaje** Permito ver mi madurez para afrontar estudios superiores desde la calidad en la presentación de mis trabajos teóricos e ilustrativos de gráficos de funciones, evidenciando el crecimiento de mis estructuras de pensamiento y lenguaje.		

1. Representar en la recta real cada uno de los siguientes intervalos.

a. $(-\infty, \mathbf{7})$ **b.** $[\mathbf{0}, \infty) \cup (-\infty, \mathbf{7})$ **c.** $[\mathbf{0}, \infty) \cap (-\infty, \mathbf{7})$

d. $[\mathbf{1}, \infty) \cup (-\infty, \mathbf{1}]$ **e.** $[\mathbf{1}, \infty) \cap (-\infty, \mathbf{1}]$ **f.** $[\mathbf{1}, \infty) \cap (-\infty, \mathbf{1})$

2. Expresa como conjunto los intervalos del punto anterior.

3. Escribe como intervalo cada conjunto.

$$N = \{x/x \in \mathbb{R}, x \geq 8\}$$
$$M = \{x/x \in \mathbb{R}, -6 \leq x \leq 12\}$$
$$P = \{x/x \in \mathbb{R}, 16 \leq x\}$$

Teniendo en cuenta los conjuntos anteriores, realizar las operaciones indicadas entre ellos y escribir los intervalos resultantes.

a. $\boldsymbol{M} \cup \boldsymbol{N}$ **b.** $\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N}'$ **c.** $\boldsymbol{M}' \cup \boldsymbol{P}$ **d.** $(\boldsymbol{M} \cup \boldsymbol{N})'$ **e.** $\boldsymbol{N}'$ **f.** $\boldsymbol{M} - \boldsymbol{N}$

g. $(\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N})'$ **h.** $(\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{N})'$ **i.** $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{N}$

4. Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

a. $\mathbf{9} > 7 - 8\boldsymbol{x}$ **b.** $\mathbf{9}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}} \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}$ **c.** $-\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{0.3} > 7 - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$

d. $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{x} - \mathbf{6} < 0$ **e.** $\mathbf{18}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} > 0$ **f.** $\mathbf{18}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} < 0$

g. $(\boldsymbol{x} + \mathbf{3})(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{6}\boldsymbol{x} + \mathbf{8}) < 0$ **h.** $\mathbf{6}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{7}\boldsymbol{x} - \mathbf{3} > 0$

i. $\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{7}\boldsymbol{x} + \mathbf{2} \leq \mathbf{0}$

j. $\frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}} - \frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}} > 0$ **k.** $\frac{\mathbf{9}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{5}} \leq \mathbf{0}$ **l.** $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1}} - \frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}} \leq \mathbf{0}$

m. $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}} \leq \mathbf{0}$ **n.** $\frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}} < 0$ **o.** $\frac{\mathbf{7}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{8}} \geq \frac{\mathbf{16}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{6}}$

5. Subrayar el error o los errores que se cometieron al resolver cada inecuación.

$$-1 < 3x - 8 < 6$$
$$-1 + 8 < 3x < 6$$
$$7 < 3x < 6$$
$$\frac{7}{3} < x < \frac{6}{3}$$
$$\frac{7}{3} < x < 2$$

$solución\ \left(\frac{7}{3}, 2\right)$

$$x - 7 < \frac{1}{3}x + 6$$
$$x - \frac{1}{3}x < 6 + 7$$
$$\frac{2}{3}x < 13$$
$$x < \frac{39}{2}$$

$solución\ \left(\frac{39}{2}, \infty\right)$

6. Dibujar un plano cartesiano y sombrear el conjunto de puntos que satisfacen las siguientes desigualdades:

a. $-2 \leq x < 0$; $-1 < y \leq 3$

b. $x \geq 0$; $y \geq x - 1$; $x + y \leq 5$

c. $x < 0$; $y \leq 3$

d. $2y \geq -4x - 2$

7. El precio unitario P de venta de un producto está dado por P$= 1500 - 0{,}5x$ pesos, donde x es la cantidad de productos vendidos. ¿Cuántas unidades deben ser vendidas para que el ingreso por la venta de este producto sea mayor que $\$300000$?

8. Hallar los valores de x que satisfacen las ecuaciones y las inecuaciones

a. $\left|\frac{3}{2} - x\right| = 4$

b. $|6x + 7| = |5x - 1|$

c. $\left|-\frac{9}{5}x + 2\right| = 5x + 8$

d. $\left|\frac{x+2}{x-3}\right| = \left|x + \frac{2}{5}\right|$

e. $|7x + 6| \leq |1 - 2x|$

f. $|12 + x| > |8 - 2x|$

9. ***Extrae datos de un texto.*** La temperatura en gados Faherenheit se puede escribir mediante la relación $F = \frac{9}{5}C + 32$, donde C es la temperatura en grados Celsius. Se debe realizar un trabajo con soldadura entre **3500 °F y 4000 °F**. ¿Cuál es el rango de temperatura para hacer el trabajo en grados Celsius?

10.***Plantea una ecuación.*** La distancia entre dos números reales a y b está dada por $d = |a - b|$ **.**

a. Encontrar los números que distan de **– 9** al menos 8 unidades.

b. La distancia del doble de un némero a 4 es máximo de 7 unidades. Localizar todos los números que cumplen esa condición.

11. ***Economía.***En la producción de un determinado número de equipos de sonido se gastan entre $3.000.000 y $4.000.000. Si el costo fijo de la producción es de $100.000, ¿entre qué valores estuvo el costo variable? (La función de costo está determinada por c(x)=mx+b, con mx: costo variable, b: costo fijo y m: costo marginal y mide el incremento en costo por cada unidad.

12. ***Electricidad.*** Determinar entre qué valores está el voltaje de un aparato eléctrico que consume entre 12 y 20 amperios y tiene una resistencia de 10 ohmios. *(corriente(I), voltaje(V) y resistencia (R); I = V/ R; Voltaje medido en voltios, resistencia medida en ohmios).*

FUNCIONES

13. Dados los conjuntos **A** = $\{\boldsymbol{-1, 0, 1, 2}\}$, **B** = $\{\boldsymbol{x \in Z/0 \leq x} < 6\}$
a. Realiza el diagrama de una relación de A en B.
b. Realiza el diagrama de una función de A en B.
c. Identifica el dominio, codominio y rango en la relación y en la función.

14. Evalúa la función definida por $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x^2+3x-2}}{\boldsymbol{x-1}}$ $si\ \boldsymbol{x = -2, 0, 1, a,\ a+1}$

15. Calcula el valor de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 2}$ para cada valor de $\boldsymbol{x}$ dado.
a. $\boldsymbol{f(0.1)}$ b. $\boldsymbol{f(\sqrt{3})}$ c. $\boldsymbol{f(a+1)}$ d. $\boldsymbol{f(\sqrt{a+1})}$

16. Halla la ecuación de la recta con las siguientes condiciones.
a. Pasa por los puntos **(2, -3/2) y (-1/2,-1).** b. **(2, -1)** y **(2, -3).** **c. (0, -3)** y **(4, -3).**
d. Pasa por **(2, -4)** su pendiente es igual a -2.
e. Pasa por **(-2, -4)** y forma un ángulo de 30° con el eje x.
f. Pasa por el punto con ordenada igual a -2 y abscisa 3, y es paralela a la recta $\boldsymbol{y = -2x + 3}$.
g. Pasa por el punto (2,-1) y es perpendicular a la recta **x = -2.**
h. Pasa por el punto (-1,2) y es perpendicular a la recta 3$\boldsymbol{y = -2x - 4}$.
17. Hallar el vértice, los cortes con los ejes, el dominio y el rango de las siguientes funciones; los intervalos de crecimiento y decrecimiento; el intervalo donde la función es positiva y el signo de su concavidad. Luego, traza su gráfica.

a. $\boldsymbol{y = -2 + 3x^2 + x}$ b. $\boldsymbol{y = x - 5x^2}$ c. . $\boldsymbol{y = (x+1)^2 + 3}$

18.
A. Identifica cuáles de las siguientes funciones son polinómicas (función constante, función afín, función cuadrática, función cúbica), funciones racionales, funciones radicales, funciones trascendentes (función exponencial, función logarítmica, función trigonométrica), funciones especiales (función a trozos, función valor absoluto, función parte entera).
B. Elabora la tabla de valores y traza la gráfica de cada función.
C. Halla los coordenadas de los interceptos.
D. Halla el dominio y el rango de cada función.
E. Indica si las funciones son biyectivas.
F. Determina si las siguientes funiciones son pares, impares o ninguna de las dos.
G. Determina los intervalos en los que la función es creciente y en los que la función es decreciente.
H. Determina las asíntotas verticales y horizontales, donde sea posible.

a. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{x+1}}$ b. $\boldsymbol{g(x) = |x+2|}$ c. $\boldsymbol{h(x) = -|x+2|}$ d. $\boldsymbol{y = x + 3}$

e. $\boldsymbol{y = -3x + 2}$ f. $\boldsymbol{y = \frac{x+5}{2}}$ g. $\boldsymbol{y = 3x^2 - x}$ h. $\boldsymbol{y = 4x - x^2}$

i. $\boldsymbol{h(x) = \frac{1}{5}x^2 + 1}$ j. $\boldsymbol{y = x^3 - x}$ k. $\boldsymbol{y = 2x^3}$ l. $\boldsymbol{y = 3^x}$

m. $\boldsymbol{y = 4}$ n. $\boldsymbol{y = \frac{3}{\sqrt{x+1}}}$ n. $\boldsymbol{y = \frac{3}{x+1}}$ o. $\boldsymbol{y = \frac{3}{x^2-1}}$

p. $\boldsymbol{y = \frac{3}{x^2+1}}$ q. $\boldsymbol{y = \sqrt{t-3}}$ r. $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2,\quad -1 \le x} < 2$

s. $\boldsymbol{y = \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}}}$ t. $\boldsymbol{y = -3cosx}$ u. $\boldsymbol{y = -3cosx + 2}$ v. $\boldsymbol{y = tan\ x}$

w. $\boldsymbol{y = senx}$ x. $\boldsymbol{y = cscx}$ y. $\boldsymbol{y = secx}$ z. $\boldsymbol{y = ctgx}$

1. $\boldsymbol{y = e^x}$ 2. $\boldsymbol{y = e/2}$ 3. $\boldsymbol{y = \pi x}$ 4. $\boldsymbol{y = \sqrt{t}}$

5. $\boldsymbol{y = -senx}$ 6. $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$ 7. $\boldsymbol{y = -2^x}$ 8. $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{t-1}}$

9. $\boldsymbol{y = log\ x}$ 10. $\boldsymbol{y = ln\ x}$ 11. $\boldsymbol{y = \log_2(x+2)}$ 12. $\boldsymbol{y = \frac{x+1}{x^2+2x-3}}$

13. $\boldsymbol{y = \frac{3x^2-2x-1}{2x^2-7x+5}}$ 14. $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x+1}, & \boldsymbol{x \leq -1} \\ \boldsymbol{2}, & \boldsymbol{-1} < x \leq 3 \\ \boldsymbol{-2x+6}, & \boldsymbol{x} > 3 \end{cases}$ 15. $\boldsymbol{y} = [\![\boldsymbol{x+1}]\!]$

16. $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^2}, & \boldsymbol{x} > 1 \\ \boldsymbol{x^3}, & \boldsymbol{x \leq 1} \end{cases}$

19. Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x) = 1 - x}$, $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 2x + 3}$, $\boldsymbol{h(x) = x^2}$, $\boldsymbol{i(x) = \sqrt{x+2}}$ Calcula

a. $\boldsymbol{(f+g)(-1)}$ b. $\boldsymbol{(2g-h)(-1)}$ c. $\boldsymbol{(f \cdot h)(-1)}$ d. $\boldsymbol{\left(\frac{f}{i}\right)(-1)}$

e. $\boldsymbol{f(g(x))(-1)}$ f. $\boldsymbol{g(f(x))(-1)}$ d. $\boldsymbol{g(h(x))(-1)}$ i. $\boldsymbol{h(i(x))(-1)}$

Luego, halla el dominio de las funciones $\boldsymbol{f\big(g(x)\big)}$; $\boldsymbol{h\big(i(x)\big)}$**.** Halla la inversa de las funciones $\boldsymbol{f, h}$**.**

	MODELO DE FORMACIÓN POR PROCESOS Y VALORES CRISTIANOS		
	Área de Matemáticas		
	TALLER 2. SUCESIONES		
	Versión 1.0	Fecha última actualización 01/09/ 2011	Página 1 de 2

Fecha: ______________________ Estudiante: ____

Grado: 11° Maestro: Miguel Adolfo Preciado Vélez

METAS DE CALIDAD	VALORACIÓN	FIRMA DE ACUDIENTES
➢ **Dimensión Cognitiva** Mejoro mi capacidad mental para el análisis a través de la utilización del tema de sucesiones en la resolución de problemas siguiendo los procesos matemáticos aprendidos. ➢ **Pensamiento y Lenguaje** Permito ver mi madurez para afrontar estudios superiores desde la calidad en la presentación de mis trabajos teóricos e ilustrativos de gráficos de funciones, evidenciando el crecimiento de mis estructuras de pensamiento y lenguaje.		

1. Calcula los primeros seis términos de cada una de las siguientes sucesiones.

a. $\{a_n\} = 2n - 1$ b. $\{a_n\} = 2(n - 1)$ c. $\{a_n\} = 3\sqrt{n-1} - 2$

d. $\{a_n\} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ e. $\{a_n\} = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Escribe el término n-ésimo de las siguientes sucesiones.

a. 1,4,9,16,25… b. 0,3,15,24,… c. 0,7,26,63,… d. 1/2,1/3,1/4,1/5…

e. 1/2, 2/5, 3/10, 4/17,… f. -6, -2, 2, 6, 10 g. 4, -9, 16, -25, 36, -49, ...

3. Halla la suma de los términos indicados en cada progresión aritmética.

a. 5, 10, 15, …, 5000. b. 10, 20, 30, 990.

4. Resuelve el siguiente problema.

Pedro obtiene su primer empleo a los 20 años de edad, en el cual recibe $450.000; pero, se le ha prometido que cada año se le hará un aumento de $25.000. Si Pedro trabajara hasta cumplir 65 años, de cuánto sería el salario mensual que devengaría al final de ese período?

5. El segundo término de una progresión geométrica es 6 y el quinto es 48. Escribe la progresión.

6. El 1^{er} término de una progresión geométrica es 3, y el 8º es 384. Hallar la razón, y la suma y el producto de los 8 primeros términos.

7. Calcular la suma de los primeros 5 términos de la progresión : 3, 6, 12, 24, 48, ...

8. Calcular la suma de los términos de la progresión geométrica decreciente ilimitada:
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

9. Juan ha comprado 20 libros, por el primero ha pagado 1€, por el segundo, 2 €, por el tercero 4 €, por el cuarto 8 € y así sucesivamente. ¿Cuánto ha pagado por los libros?

10. Uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado l, se obtiene otro, en el que volvemos a hacer la misma operación, y así se continua indefinidamente. Calcular la suma de las áreas de los infinitos cuadrados.

11. Hallar la fracción generatriz de 0.18181818...

12. Encontrar la fracción generatriz de 3.2777777...

Fecha: ______________________ Estudiante: ____

Grado: 11° Maestro: Miguel Adolfo Preciado Vélez

METAS DE CALIDAD	VALORACIÓN	FIRMA DE ACUDIENTES
➢ **Dimensión Cognitiva** Utilizo mis conocimientos matemáticos adquiridos sobre el tema de límites de funciones y continuidad, para demostrar mi capacidad mental reflexiva al resolver problemas referidos al tema. ➢ **Pensamiento y Lenguaje** Permito ver mi madurez para afrontar estudios superiores desde la calidad en la presentación de mis trabajos teóricos e ilustrativos de gráficos de funciones, evidenciando el crecimiento de mis estructuras de pensamiento y lenguaje.		

1. Halla el límite de la siguiente función cuando

a) **x→3**;

b) **x→(-1/2)**

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^3 - 27}$$

2. Analiza lo que le sucede a la función $g(x)$, cuando x se aproxima a -3 por la izquierda y por la derecha:

$$g(x) = -\frac{2}{x+3}$$

a) Elabora una tabla de valores muy cercanos a -3, mayores que -3 y menores que -3.

2. Observa la gráfica de esta función f(x) y calcular estos límites.

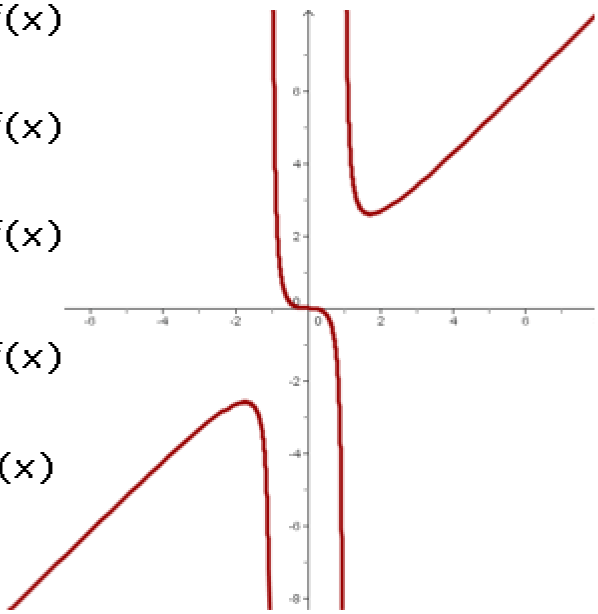
1. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

2. $\lim_{x \to -1} f(x)$

3. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

4. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

5. $\lim_{x \to \infty} f(x)$



Calcula los siguientes límites.

3 $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x} \right)$

4 $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x - 1} - \frac{x^2 + 1}{x - 2} \right)$

5 $\lim_{x \to \infty} \frac{7x - 1}{\sqrt[3]{5x^3 + 4x - 2}}$

6 $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1}$

7 $\lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 1)^2 - 3x^2 + 3}{x^3 - 5}$

8 $\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x^8 - 5)}{x^2}$

9 $$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-1}{\sqrt{x^7+x^5}}$$

10 $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+x^5+x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^x}$$

11. Probar que:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x<0\\ \dfrac{x^2-3}{3} & \text{si } x>0\end{cases}$$

tiene límite -1 cuando x $\to$ 0.

12. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{5}{x^4-16}$$

$$f(x)=\frac{x-7}{x^3-x^2-11x+3}$$

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & si\ x<2\\ 2x-1 & si\ x\geq 2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & si\ x\leq 0\\ 2x-3 & si\ x>0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & si\ x<1\\ \sqrt{x+1} & si\ x\geq 1\end{cases}$$

13. Estudia, en el intervalo (0,3), la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si\quad 0<x<1 \\ 0 & si\quad 1\leq x<2 \\ x-1 & si\quad 2\leq x<3 \end{cases}$$

14. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & Si\quad x\neq 5 \\ 0 & Si\quad x=5 \end{cases}$$

Demostrar que f(x) no es continua en x = 5.

15. Calcular el valor de ***a*** para que la función siguiente sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & si\quad x\leq 1 \\ 3-ax^2 & si\quad x\leq 1 \end{cases}$$

Fecha: ______________________ Estudiante: ____

Grado: 11° Maestro: Miguel Adolfo Preciado Vélez

METAS DE CALIDAD	VALORACIÓN	FIRMA DE ACUDIENTES
➢ **Dimensión Cognitiva** • Incremento mi desarrollo mental al presentar análisis gráfico y numérico sobre la derivada de una función. • Preparo y presento problemas de la cotidianidad que impliquen el cálculo de la derivada de una función, presentando soluciones a los mismos para evidenciar mi desarrollo mental. ➢ **Dimensión Afectiva** • Ideo estrategias para formar equipos de trabajo, donde los estudiantes con avances significativos en el tema de derivadas, colaboren con los compañeros con mayores dificultades, fortaleciendo el ser solidario. ➢ **Dimensión Ética-Volitiva** • Elaboro estrategias para mejorar mi aprendizaje en el tema de cálculo de derivadas evidenciando mi voluntad por hacer bien las cosas.		

1.(*velocidad media y velocidad instantánea*). La función de posición de un objeto está dada por la expresión $f(t) = 3t^2 + 6$ en la cual t está dada en segundos y $f(t)$ en metros.
a. Encontrar la velocidad media del objeto en el intervalo [10,12].
b. Encontrar la velocidad cuando $t = 8$.

2. Halle la derivada de las siguientes funciones, aplicando la *definición de límite*.

a. $f(x) = 2x^3$ b. $f(x) = x - 2$ c. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ d. $f(x) = \sqrt{x}$

Definición

La pendiente de la recta tangente a la curva con ecuación $y = f(x)$ en el punto (x_o, y_o), denotada $m_t(x_o)$ es igual al $\lim_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, siempre que este límite exista.

Ejemplo:

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuación $f(x) = x^2 - 3x$, en el punto $(1. -2)$.

La ecuación de la recta tangente es: $y = mx + b$. Utilizando la definición anterior vamos a averiguar la pendiente en $(1, -2)$.

Solución:

Así:

$$m_t(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x - (-2)}{x - 1}$$

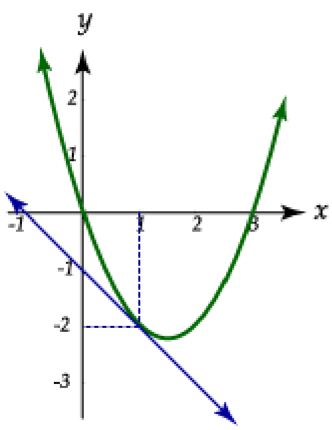
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} x - 2 = -1$$

Luego $m_t(1) = -1$, por lo que $y = -x + b$. Para averiguar b sustituimos el punto $(1, -2)$ como sigue: $-2 = -(1) + b$ de donde $b = -1$.
Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y = -x - 1$.

La representación gráfica de la curva y de la recta tangente es el siguiente:



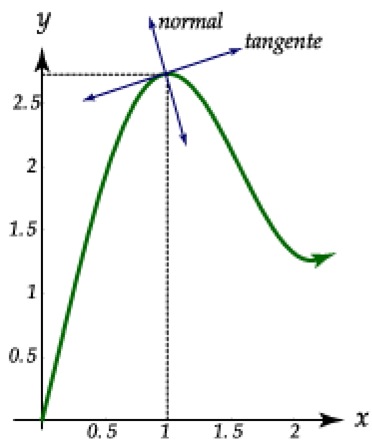
Definición

Se dice que la recta normal a una curva en el punto $P(x_o, y_o)$, es la línea que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente en ese punto. Además, recuerde que dos líneas no verticales son perpendiculares entre sí, si y solo si sus pendientes tienen valores recíprocos negativos.

Si m_t es la pendiente de la recta tangente y m_N la de la recta normal, entonces:

$$m_N = \frac{-1}{m_T}$$

$$(m_T . m_N = -1)$$



Ejemplo:

Determinar la ecuación de la recta normal a la curva con ecuación $f(x) = \frac{4}{x} \ , x > 0$, en el punto $(2, 2)$

Solución:

Como $m_N = \frac{-1}{m_T}$, averiguamos primero la pendiente de la recta tangente. Así:

$$m_t(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\frac{4}{x} - \frac{4}{2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\frac{8-4x}{2x}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{4 - 2x}{x(x - 2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{4 - 2x}{x(x - 2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-2(x - 2)}{x(x - 2)}$$

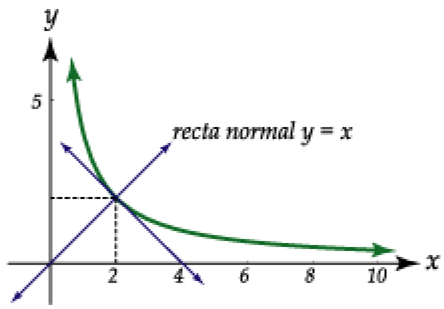
$$= \lim_{x \to 2} \frac{-2}{x} = -1$$

Como $m_T(2) = -1$, entonces $m_N(2) = 1$

La ecuación de la recta normal es: $y = 1x + b$. Sustituyendo en la ecuación anterior $x = 2,\, y = 2$ se obtiene $b = 0$.

Por tanto, la ecuación de la recta normal es $y = x$.

La representación gráfica de la curva y la recta normal es la siguiente:



La ecuación de la recta tangente es $y = -x + 4$

Tomado de http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/curso-elsie/derivadafuncion/html/node2.html.

3. Encontrar la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de

a. $f(x) = 2x^2 + x$ en el punto (1,3). Trazar la gráfica. Trazar las gráficas correspondientes.

b. $f(x) = x^3$ en el punto $(-2,-8)$. Trazar la gráfica. Trazar las gráficas correspondientes.

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

Funciones no compuestas:

1) $f(x)=3x^3+\frac{2}{3}x^2-x+3\sqrt[3]{x}$	2) $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}-2-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^3}$	3) $f(x)=x\sqrt{x}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}-\frac{3}{x\sqrt[3]{x^2}}$
4) $f(x)=\frac{3x^2\sqrt[4]{x}-2x\sqrt{x}}{5\sqrt[4]{x^3}}$	5) $f(x)=x^2 senx+\sqrt{x}\cos x$	6) $f(x)=x^3\ln x-\frac{1}{\sqrt{x}}tgx$
7) $f(x)=\frac{ctgx}{\sqrt[3]{x^2}}-e^x$	8) $f(x)=e^x senx+e^x\cos x$	9) $f(x)=4^x arcsenx$
10) $f(x)=\sqrt{x}arctgx$	11) $f(x)=\frac{5x-2}{4x^2-1}$	12) $f(x)=\frac{x+e^x}{x-e^x}$
13) $f(x)=\frac{x-arctgx}{arcsenx}$	14) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-arctgx}$	15) $f(x)=\frac{x+\ln x}{x^3}$
16) $f(x)=\frac{senx+\cos x}{senx-\cos x}$	17) $f(x)=\frac{tgx-ctgx}{xsenx}$	18) $f(x)=\frac{1}{x}+2\ln x-\frac{\ln x}{x}$
19) $f(x)=xe^x senx$	20) $f(x)=\frac{x^3 senx}{\ln x}$	21) $f(x)=\sqrt{x}e^x$

Funciones compuestas:

1) $y=\left(4x^3+6x-2\right)^{17}$	2) $y=\sqrt{x^4-3x^2+6}$	3) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-5}}$	4) $y=\left(senx-\cos x\right)^5$
5) $y=x\left(arctgx\right)^3$	6) $y=\left(1-x^2\right)^5\left(arcsenx\right)^3$	7) $y=\frac{1}{\left(2x+1\right)^3}$	8) $y=sen3x+sen^2 3x$
9) $y=\cos^3 x-\cos(x^3)$	10) $y=\ln(senx)$	11) $y=\log\left(sen\sqrt{x}\right)$	12) $y=\frac{x+\cos\sqrt{x}}{x-\cos\sqrt{x}}$
13) $y=arcsen\sqrt{1-x^2}$	14) $y=\left(\frac{sen5x+\cos 5x}{sen5x-\cos 5x}\right)^3$	15) $y=\arccos\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$	16) $y=arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
17) $y=arcsen\frac{x^2-1}{x^2}$	18) $y=arcsen\left(1-e^x\right)$	19) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)$	20) $y=x^5e^{-\frac{1}{x^6}}$
21) $y=8^{arcsen\left(\frac{1}{x}\right)}$	22) $y=\ln\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}}$	23) $y=arcsen(1-x)+\sqrt{2x-x^2}$	
24) $y=\sqrt{a^2-x^2}+a\cdot arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$		25) $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2 arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$	

Derivación logarítmica

1) $y = x^{3x}$	2) $y = x^{x^2}$	3) $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$
4) $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{senx}}$	5) $y = \sqrt[x]{\ln x}$	6) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$
7) $y = x^{x^x}$	8) $y = \sqrt[3]{x^2}\left(sen^7 x\right)5^{x^3}$	9) $y = \frac{(x+2)^9}{\sqrt{(x-3)^7 (x+8)^{11}}}$
10) $y = \frac{x^{-\frac{1}{5}} sen^3 x \ln x}{(arcsenx)^3}$	11) $\frac{(1-\cos x)^7\, tg^3 x}{\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{senx}}$	12) $x^4 \sqrt[5]{\frac{x^3}{x^2+3}}$

Derivación implícita

Ejemplos:

1. Suponiendo que existe una función derivable f tal que $f(x)$ está definida implícitamente por la ecuación $x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 = 0$, calcular $D_x y$

   Solución:

   Derivando implícitamente se obtiene:

   $$3x^2 + 3y^2 \cdot D_x y - 6x + 6y \cdot D_x y = 0$$

   $$(3y^2 + 6y) \cdot D_x y = 6x - 3x^2$$

   $$D_x y = \frac{6x - 3x^2}{3y^2 + 6y} = \frac{2x - x^2}{y^2 + 2y}$$

   Note que hemos trabajado como si $y = f(x)$.

2. En cada caso determinar una ecuación para la recta tangente y una ecuación para la recta normal a la gráfica de la ecuación dada en el punto P. Graficar la curva, la recta tangente y la recta normal.

a. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0, \quad P(1,3)$

b. $y^2 = 4ax; \quad P(a, 2a), \quad a > 0$

Solución:

a.

Primero obtenemos $D_x y$ que nos da la pendiente de la recta tangente:

$2x + 2y \cdot D_x y - 4 + 6 \cdot D_x y - 0 = 0$ de donde $D_x y = \dfrac{2-x}{y+3}$

Evaluando $D_x y$ en $P(1,3)$ se tiene que $m_t = \dfrac{1}{6}$

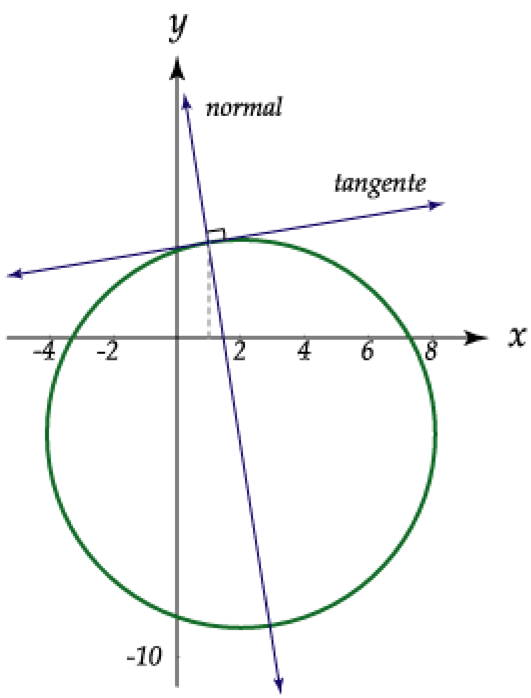
Luego $y = \dfrac{1}{6}x + b$. Sustituyendo $(1,3)$ se obtiene que $b = \dfrac{17}{6}$ por lo que la ecuación de la recta tangente es $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{17}{6}$

La pendiente de la recta normal es $m_N = -6$ de donde la ecuación de esta recta es: $y = -6x + b_1$; sustituyendo nuevamente en $(1,3)$ se obtiene que $b_1 = 9$

La ecuación de la recta normal es: $y = -6x + 9$

La ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0$ puede escribirse como $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 36$ que representa la ecuación de una circunferencia con centro en $(2,-3)$ y radio 6.

La representación gráfica de la curva y las rectas es la siguiente:



b.

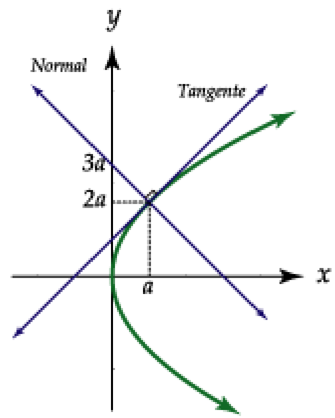
Dada la ecuación $y^2 = 4ax$ obtenemos $D_x y$. como $2y \cdot D_x y = 4a$ entonces $D_x y = \dfrac{2a}{y}$

Evaluando en $P(a, 2a)$ se tiene que $D_x y = \dfrac{2a}{2a} = 1$

Luego, la pendiente de la recta tangente es $m_T = 1$ y la ecuación es $y = x + b$. Sustituyendo $(a, 2a)$ en esta ecuación se obtiene que $b = a$ por lo que finalmente la ecuación de la recta tangente es $y = x + a$.

La pendiente de la recta normal es $m_N = -1$ y la respectiva ecuación es: $y = -x + b$. Sustituyendo (x, y) por $(a, 2a)$ se obtiene que $b = 3a$ por lo que la ecuación de la recta normal es $y = -x + 3a$.

La representación gráfica de la curva, las recta tangente y de la recta normal es la siguiente:



Ejercicios:

1. Probar que las rectas tangentes en el origen a las curvas con ecuaciones $4y^3 - x^2y - x + 5y = 0,\; x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$ son perpendiculares entre sí.
2. En cada caso:

a.
Determinar $D_x y$ en términos de "x" y "y" utilizando la derivación implícita.
b.
Despejar "y" en términos de "x" y demostrar que cada solución y su derivada satisfacen la ecuación obtenida en a.

i $x^2 - 2xy = 5$

ii $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, a cte

iii $2x^2 - 3xy - 4y^2 = 5$

Fecha: ______________________ Estudiante: ____
Grado: 11° Maestro: Miguel Adolfo Preciado Vélez

METAS DE CALIDAD	VALORACIÓN	FIRMA DE ACUDIENTES
DIMENSION COGNITIVA: Desarrollo tareas y proyectos de investigación, organizando datos en tablas de frecuencias y gráficos estadísticos y calculando probabilidades de eventos incrementando mi actividad intelectual y experimental. **DIMENSION TÉCNICA:** Elaboro tareas y proyectos de investigación, utilizando las Tics como herramienta de trabajo estadístico.		

PROPÓSITO: Recordar conceptos básicos de estadística y probabilidad para aplicarlos en la solución de problemas.

1. Una encuesta reciente mostró que el propietario típico de auto en Colombia destina $2.950.000 al año en gastos de operación, de la siguiente forma: combustible $603.000, Intereses del préstamo para adquisición $279.000, reparaciones $930.000, seguros y permisos $646.000, depreciación $492.000. Represente la información en una tabla con porcentajes y en un diagrama circular.

2. En el edificio de apartamentos "La Castellana" viven 36 personas cuyas edades son:

14 15 23 28 32 39 12 19 23 26 30 35 14 18 23 27 32 36 13 17 22 27 33 38 16 24 29 32 20 25 34 24 26 25 27 26.

Utilice el método de tallos y hojas para agrupar la muestra en intervalos y construir la tabla de frecuencias, determinar los principales estadígrafos, construir histograma y la ojiva.

3. Los datos corresponden a la clasificación de un grupo de trabajadores de una planta de producción según estado civil y género: 12 hombres solteros, 20 hombres casados, 32 hombres en unión libre, 2 hombres separados, 15 mujeres solteras, 25 mujeres casadas, 21 mujeres en unión libre y 5 mujeres separadas.
Construya una tabla de contingencia para agrupar los datos y determinar:
% de trabajadores que son casados.
% de casados que son hombres.
% de trabajadores que son mujeres solteras.
% de solteros que son mujeres.
Construya el diagrama de barras.
Escriba algunas conclusiones.

4. Presente en una hoja de Excel imprimiendo pantalla.

En Colombia de cada 100 personas: 91 tiene RH positivo, 61 son del grupo O, 29 son del grupo A, 8 son del grupo B y 2 son del grupo AB. Las personas de Tipo o^{+} son donantes universales y las de tipo AB^{+} son receptores universales. (Información tomada de la revista "Tiempo Salud". Realice tabla de contingencia que clasifique el Tipo de sangre de los colombianos y represente la información en un diagrama de barras.

5. Presente en una hoja de Excel imprimiendo pantalla.
Supongamos que el contador de una pequeña empresa presenta un informe mensual de ventas, así:
Junio de 2006. Unidades vendidas, 38.560; distribuidas así: Ventas en Bogotá 17.930 unidades a $3.600 c/u por un total de $64.548.000; ventas a otras ciudades: 12.430 unidades a $3.750 c/u por un total de $46.612500; ventas de exportación: 8.200 unidades a $3.900 c/u por un total de $31.980.000. Total de ventas $143.140.500.

Las cifras de este informe son difíciles de captar en una simple lectura; el gerente que desea mostrar los porcentajes sobre el total que significan cada una de las partidas de ventas, las quiere ordenar en un cuadro estadístico y representar los porcentajes de las unidades vendidas y su destino en diagramas circular. Ayúdele usted.

6. Presente en hojas de Excel imprimiendo pantalla.
Los préstamos hipotecarios para compra de vivienda tienen distintas tasas de interés trimestral dependiendo de la ubicación, del tipo de vivienda, del sueldo promedio del trabajador y otros factores. Una muestra de 35 tasas de interés trimestral para préstamos hipotecarios se presenta a continuación:

5,2 7,9 8,0 4,6 6,5 6,0 6,6 9,0 8,5 7,5 7,5 9,2 7,3 5,5 6,5 8,0 7,4 7,5
9,3 8,1 5,0 6,5 7,0 9,5 8,2 5,3 5,8 6,0 6,5 7,2 7,4 7,6 8,0 8,3 8,6.

Ordene los datos en forma ascendente (Use la herramienta AZ)
Distribuya la muestra en intervalos usando la regla de Sturges.
Realice Gráficos: Histograma, Ojiva. (Use el asistente de gráficos)
Halle las medidas de tendencia central, cuartiles y las medidas de dispersión interpretando cada una.

7. Presente en hojas de Excel imprimiendo pantalla.
Los salarios por hora de 60 trabajadores del **"MIO"**, en miles de pesos son:

6,2 5,8 5,7 4,6 4,5 4,6 4,4 5,0 4,9 4,3 5,1 4,7 4,2 4,3 4,1 3,7 4,0 5,4 3,9 **3,0**
4,3 3,8 5,2 5,5 3,7 4,1 4,2 5,4 3,8 5,3 3,2 5,2 3,6 4,6 4,2 5,2 3,0 3,7 5,2 3,6
4,0 4,2 4,7 4,3 4,9 4,5 5,0 4,3 5,8 4,6 6,4 4,7 4,6 5,0 4,0 4,4 4,5 4,5 5,7 5,1

Ordene los datos en forma ascendente (Use la herramienta AZ)
Agrupe la muestra en intervalos aplicando la regla de STURGES
Halle las medidas de tendencia central, cuartiles y las medidas de dispersión interpretando cada una.
Realice gráficos: Histograma, Ojiva. (Use el asistente de gráficos)
Interprete n_3 h_4 N_4 H_5.

LOS DIAGRAMAS DE VENN EULER Y LAS PROBABILIDADES

PROBABILIDADES DE EVENTOS COMPUESTOS.

- **Si A y B son eventos incompatibles, entonces:** $P(A \vee B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- **Si A y B son eventos compatibles, entonces:** $P(A \vee B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$.
- **Si A y B son eventos SUCESIVOS, entonces:** $P(A \wedge B) = P(A) * P(B)$.

EJERCICIO: representar cada uno de los siguientes problemas mediante diagramas de Ven y determinar la solución.

1. En una clase de 50 estudiantes hay 20 físicos y 40 matemáticos.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de escoger un estudiante que sea físico y matemático simultáneamente?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de escoger un estudiante que sea físico exclusivamente?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de escoger un estudiante que sea físico o matemático?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de escoger simultáneamente 3 estudiantes que sean físicos o matemáticos exclusivamente?.

2. Un alumno del colegio Americano efectuó una encuesta en un grupo de 105 estudiantes acerca de los hábitos de lectura recogiendo los siguientes resultados:
   40 leen Historia; 55 leen literatura; 60 leen arte; 10 leen historia, arte y literatura; 15 leen historia y literatura; 20 leen historia y arte; 30 leen literatura y arte.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de escoger un estudiante que lea historia?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de escoger un estudiante que lea historia o literatura?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de escoger un estudiante que no guste de la lectura?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de escoger simultáneamente 2 estudiantes que lean literatura y arte exclusivamente?.

3. Se realizó una encuesta con 650 personas y se encontró que 130 veían TV, 215 escuchaban la radio y 345 leían el periódico para enterarse de las noticias, más aún, 100 leían el periódico y escuchaban la radio, 35 veían TV y escuchaban la radio, 65 veían TV y leían el periódico. Si 20 personas se enteraban de las noticias por los 3 medios, cuál es la probabilidad de escoger una persona que no utilice ninguno de los tres medios? ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar 3 personas simultáneamente que vean TV y lean el periódico pero que no escuchen las noticias por radio?

4. El dueño de un taller necesita contratar a 25 programadores para diseñar por computador y a 40 para programación de aplicaciones. De estos empleados se espera que 10 realicen tareas de los 2 tipos. Cuántos empleados se deberá contratar para el taller?

5. En un taller industrial se encontró 600 piezas para repuestos de las cuales 2500 están construidas en cobre, 2000 en aluminio y 250 en aleación con los dos metales. Determinar

   a) Cuántas piezas no están construidas en cobre?
   b) Cuántas piezas están construidas solamente en cobre?
   c) Cuántas piezas están construidas al menos con uno de estos metales?
   d) Cuántas piezas no están construidas con ninguno de estos metales?

6. En un conjunto de 100 pacientes, 20 tienen dolores estomacales, 30 tienen gripe y 5 tienen los dos síntomas. Determinar
   a) Cuántos tienen dolores estomacales o gripe exclusivamente?
   b) Cuántas personas no tiene dolores estomacales?
   c) Cuántas personas no tienen gripe?
   d) Cuántas personas tienen al menos alguno de estos dos síntomas?
   e) Cuántas personas no tienen ninguno de estos dos síntomas?

7. Si sacas al azar una ficha de un dominó, ¿cuál es la probabilidad de obtener puntaje 9?

8. En una alcancía hay 10 monedas de $ 100 y 22 monedas de $ 50. Si sacas una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad que sea una moneda de $ 50?

9. De una urna que contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes. Calcula las siguientes probabilidades:
   a. Sacar una al azar y sea bola roja.
   b. Sacar una bola roja o una amarilla.
   c. Sacar simultáneamente 2 rojas y 3 verdes.
   d. Sacar sucesivamente una amarilla y una verde.

10. Cuál es la probabilidad de obtener sólo caras al cabo de tres lanzamientos consecutivos de una moneda?

11. Determina la probabilidad de que al lanzar dos dados:
   a) sumen 7
   b) la suma sea mayor que 8
   c) salgan dos números cuya diferencia sea 2
   d) se obtenga el mismo número.

12. Una municipalidad está autorizada para diseñar patentes usando las letras A, B, y C y los dígitos con excepción del 0. Si las patentes tienen dos letras y dos números y no se

13. puede repetir la letra ni el número, ¿cuántas patentes distintas se pueden diseñar?, ¿cuál es la probabilidad de tener una patente con las letras A, C?

14. Se organiza un sorteo en el que participan los número del 1 al 40. Gana quien tenga un número múltiplo de 4 o un múltiplo de 6. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

15. En una clínica se ha organizado un archivo de los pacientes por sexo y por tipo de hepatitis. Son 45 varones de los cuales 25 tienen hepatitis tipo A. Son 35 mujeres con hepatitis tipo A y 20 con hepatitis B. Realice tabla de contingencia y muestre la información en un diagrama de barras.
En diagramas circulares muestre la relación en porcentaje por sexo y por clase hepatitis.

Si se selecciona una de las fichas del archivo al azar, determinar la probabilidad de sacar:

a. Una correspondiente al sexo femenino.
b. Una correspondiente a un caso de hepatitis tipo B.
c. Una correspondiente al sexo masculino dado que tiene hepatitis tipo A.
d. Una correspondiente al sexo femenino dado que tiene hepatitis B.

16. Un director técnico dispone de 4 defensas, 5 delanteros y 4 medio campistas para formar un equipo de "fútbol 5". ¿Cuántos equipos podría formar si cada uno está formado por 2 defensas, 2 delanteros y un medio campista?